

4 ESFORÇO DE FLEXÃO SIMPLES

O esforço de flexão simples é normalmente resultante da ação de carregamentos transversais que tendem a curvar o corpo e que geram uma distribuição de tensões aproximadamente lineares no seu interior. Essa distribuição alterna entre tensões de tração e compressão na mesma seção transversal. Isso ocorre desde que a seção transversal do corpo seja simétrica em relação ao plano de aplicação do carregamento transversal (plano de solicitação). A resultante dessa distribuição é um binário de forças de igual intensidade, mas de sentidos opostos, conhecido como momento fletor, Figura 4.1b.

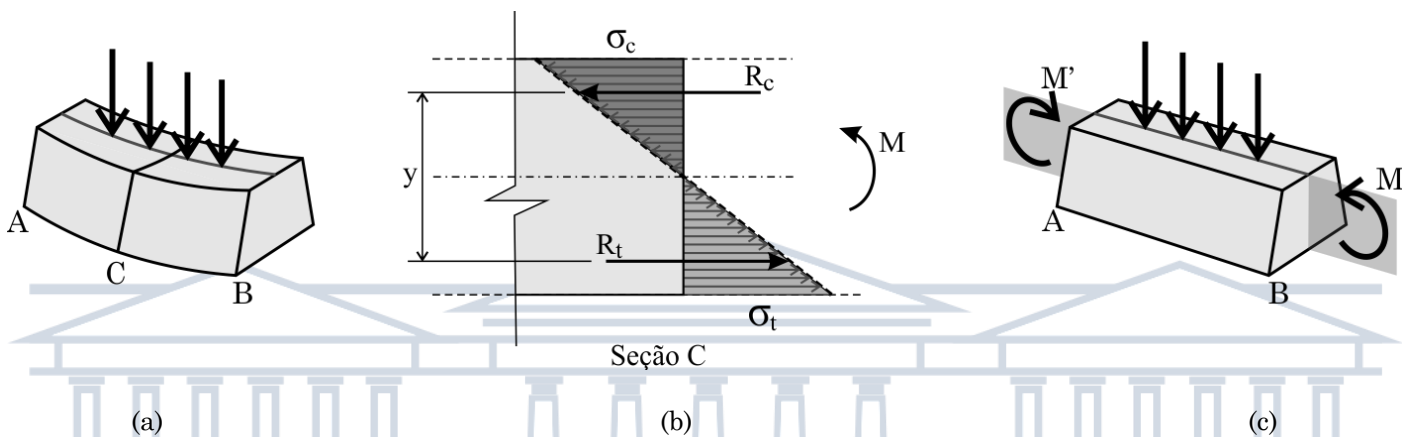


Figura 4.1: Flexão simples.

O esforço de flexão simples ocorre em corpos nos quais o sistema de forças externas, ativas e reativas, e o eixo longitudinal do corpo estejam contidos em um mesmo plano (plano de solicitação), Figura 4.1c. No caso de barras, dado o seu grande comprimento em relação às dimensões da seção transversal, aliado às hipóteses simplificadoras, a fibra média possuirá um grande raio de curvatura e, portanto será considerada localmente como reta. A convenção de sinais adotada considera positivo o momento quando a barra é flexionada de forma que a concavidade fique voltada para cima, caso contrário, considera negativo, Figura 4.1a.

4.1 FLEXÃO PURA

A flexão pura é um caso particular da flexão simples onde corpos flexionados somente estão solicitados por um momento fletor, não existindo assim o carregamento transversal. É uma condição considerada idealizada, mas com a consideração das hipóteses simplificadoras, essa condição pode ser acoplada, posteriormente, aos efeitos das cargas transversais para se definir a deformada e as tensões na flexão simples.

As condições de equilíbrio requerem que os esforços internos sejam equivalentes às solicitações externas. Como a solicitação na barra, no caso da flexão pura, é um momento constante M , em qualquer seção da barra a distribuição de tensões deve ser igual ao momento M . Seja uma seção feita na barra no ponto C da Figura 4.1a ilustrada na Figura 4.2.

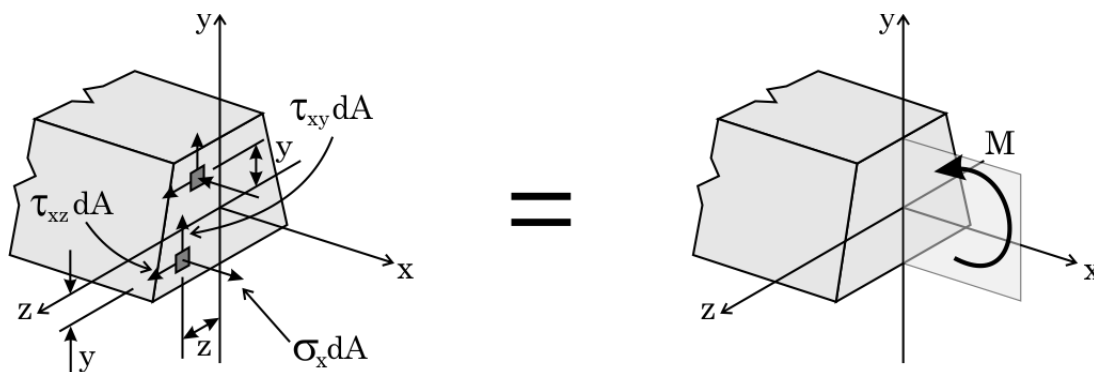


Figura 4.2: Tensões na seção transversal no ponto C durante a flexão.

Chamando de σ_x a tensão normal em um ponto da seção transversal e τ_{xy} e τ_{xz} as componentes da tensão de cisalhamento é possível expressar o sistema de forças internas equivalentes ao momento M . Como o momento M consiste de duas forças de igual intensidade, mas sentidos opostos, Figura 4.1b, a soma dessas componentes é sempre igual a zero. Além disso, o momento fletor M é o mesmo em relação a qualquer eixo perpendicular ao seu plano e é zero em relação a qualquer eixo contido no seu plano. Aplicando-se as equações da estática, somatório de forças e somatório de momento, em função das resultantes, função das tensões nos elementos infinitesimais da seção em C , ilustrados na Figura 4.2, chega-se respectivamente a:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad \text{Equação 4.1}$$

Somatório dos momentos em torno do eixo y , e:

$$\int -y\sigma_x dA = M \quad \text{Equação 4.2}$$

Somatório dos momentos em torno do eixo z .

As demais componentes normais e de cisalhamento, em uma barra submetida a flexão pura, não precisam ser consideradas, conforme será visto a seguir.

4.1.1 HIPÓTESE DE BERNOULLI

Em relação às tensões, seja o corpo da Figura 4.1 dividido em um grande número de pequenos elementos conforme ilustra a Figura 4.3, e considerando-se ainda apenas um momento M aplicado (Flexão Pura).

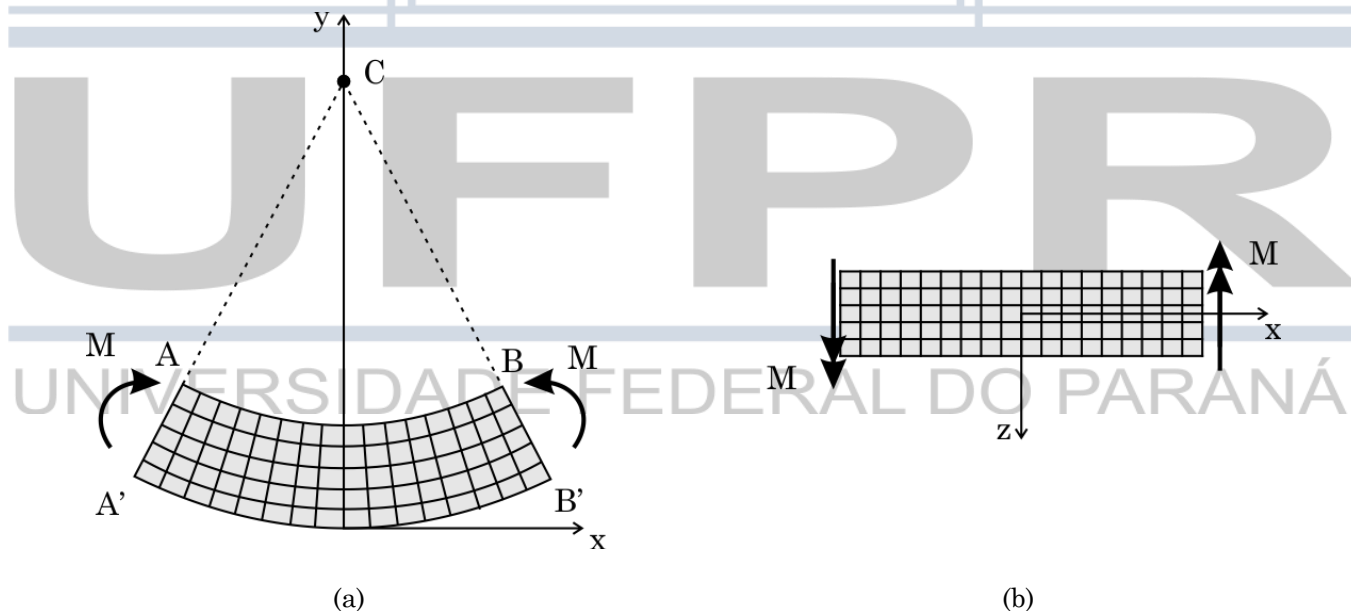


Figura 4.3: Divisão em diversos elementos, seção vertical, longitudinal (a) e seção horizontal, longitudinal (b).

A hipótese de Bernoulli nos diz que as seções transversais, após a deformação do de flexão pura do corpo com eixo de simetria, se mantém planas e ortogonais ao eixo longitudinal deformado.

Aliando a hipótese de Bernoulli com o fato de que o raio de curvatura é grande, todas as seções ilustradas na Figura 4.3 estarão aproximadamente a 90° umas das outras, ou seja, as deformações angulares $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ e, portanto, as tensões de cisalhamento $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. Com a utilização das hipóteses simplificadoras, em especial o fato de estarmos considerando pequenas deformações e o corpo em estudo possuir características de barra,

observa-se que nas superfícies as tensões $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Sendo assim, na flexão pura de uma barra, ocorre um estado de tensões uniaxiais, sendo a única tensão existente a tensão normal na direção x , σ_x .

A partir da discussão inicial juntamente com a hipótese de Bernoulli, conclui-se que deve existir uma superfície paralela às faces superior e inferior da barra fletida, na qual a tensão σ_x e a deformação ϵ_x sejam iguais à zero. Essa superfície é conhecida como superfície neutra e a interceptação da linha neutra com o plano de simetria da seção transversal da barra, Figura 4.4a, é uma linha reta conhecida como linha neutra.

4.1.2 DEFORMAÇÕES NA FLEXÃO PURA

Seja um elemento de barra prismático com seção transversal simétrica em relação ao eixo vertical, submetido a um momento fletor M , conforme ilustra a Figura 4.4. Esse elemento sofrerá flexão sob a ação do momento M e permanecerá simétrico em relação ao plano de simetria da seção transversal, além disso, o momento M é igual em qualquer seção da barra entre A e B.

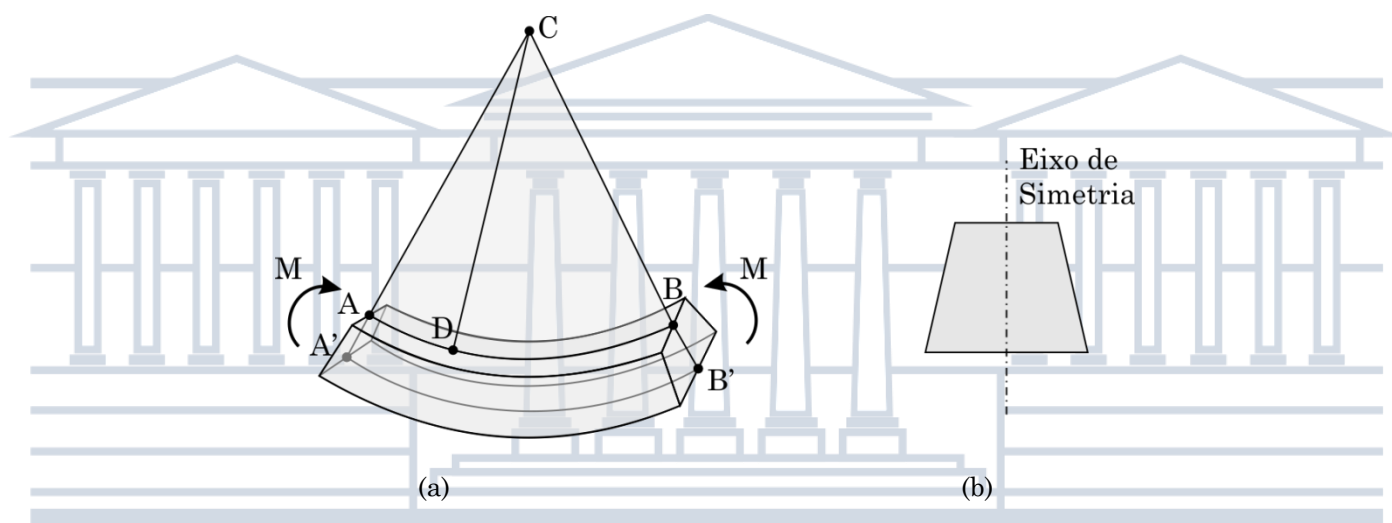


Figura 4.4: Elemento de barra com seção transversal simétrica flexionado.

Essa flexão da barra fará com que a linha AB da face superior, que intercepta o plano de simetria, originalmente reta, tenha uma curvatura constante, assim como a linha A'B' da face inferior. Nota-se também que, sendo o momento M aplicado no sentido ilustrado na Figura 4.4, a linha AB sofrerá encurtamento no seu tamanho e a linha A'B' sofrerá um alongamento.

Adotando um sistema de coordenadas com origem na linha neutra, definida pelo segmento DE, conforme ilustra a Figura 4.5a, de modo que qualquer ponto até a superfície neutra será medido por sua coordenada y e como, por exemplo, os pontos da linha tracejada, definida pelo segmento JK, ilustrada na Figura 4.5.

Chamado de ρ o raio do arco DE e de θ o ângulo central correspondente ao arco DE, e observando que o comprimento do arco DE é aproximadamente igual ao comprimento da barra indeformada¹, L , pode-se escrever que:

$$L = \rho\theta \tag{Equação 4.3}$$

Lembrando que o segmento DE é a linha neutra da barra fletida e, portanto não sofre alongamento e nem encurtamento, pois as tensões e deformações na direção x são zero.

No arco JK, localizado a uma distância y da linha neutra, o comprimento se modifica e não vale mais L . Chamando de L' o seu comprimento, esse pode ser escrito como:

¹ Isso é válido pois se está considerando pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

$$L' = (\rho - y)\theta$$

Equação 4.4

Como o comprimento original, com a barra indeformada, do segmento JK era L, o seu deslocamento longitudinal total pode ser escrito como:

$$\delta = L' - L$$

Equação 4.5

Substituindo as Equação 4.3 e Equação 4.4 na Equação 4.5, chega-se a:

$$\delta = -y\theta$$

Equação 4.6

A deformação longitudinal do segmento JK pode ser escrita dividindo-se o seu deslocamento longitudinal total pelo seu comprimento original.

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

Equação 4.7

O sinal negativo na deformação vem do fato de supormos que o momento aplicado M seja positivo e que, portanto a barra fletida terá concavidade voltada para cima.

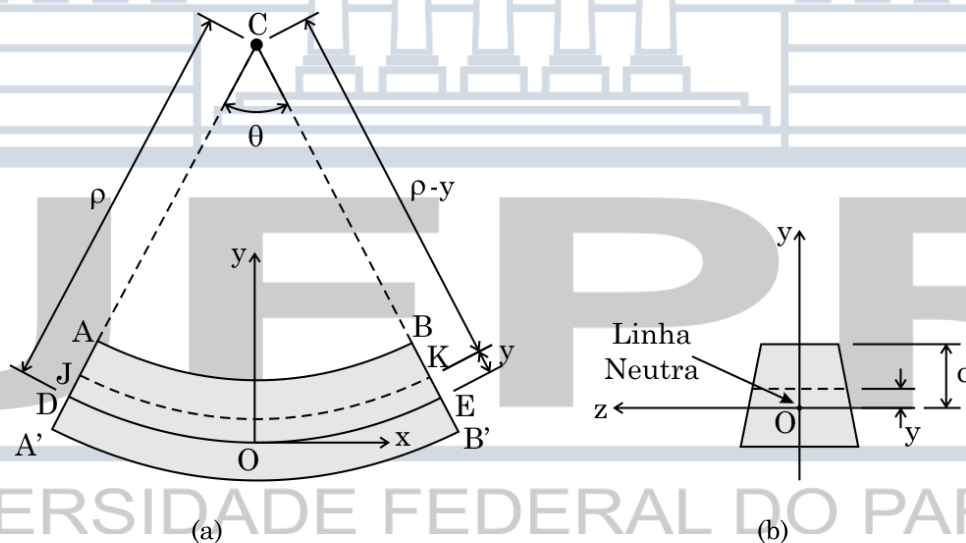


Figura 4.5: Linha Neutra, seção longitudinal (a) e transversal (b).

Sabendo-se que a maior deformação possível ocorre nos extremos da seção transversal, e sendo a distância da linha neutra até um desses extremos de c , pode-se escrever que a deformação máxima é igual a:

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{c}{\rho}$$

Equação 4.8

Por fim, a deformação normal na direção x pode ainda ser escrita em função da deformação máxima.

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_{\text{máx}}$$

Equação 4.9

Da hipótese de Bernoulli vem o fato de que as deformações serão idênticas em todos os planos paralelos ao plano de simetria. Dessa forma, o valor da deformação dado pela Equação 4.7 ou Equação 4.9 é válido em qualquer ponto e conclui-se que a deformação normal longitudinal, ε_x varia linearmente com a distância y da linha neutra.

4.1.3 TENSÕES E DEFORMAÇÕES NO REGIME ELÁSTICO

Considere que o momento M aplicado é tal que as tensões desenvolvidas na barra por flexão, Figura 4.1c, não atinjam em nenhum ponto a tensão limite do material, ou seja, a barra fletida trabalha dentro do seu limite elástico linear, sendo válida então a lei de Hooke para a tensão uniaxial.

Sendo E o módulo de elasticidade do material, da mesma forma que no esforço normal simples, pode-se escrever que:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \text{ou}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = E\varepsilon_{\text{máx}}$$

Equação 4.10

Multiplicando-se ambos os membros da Equação 4.9 pelo módulo de elasticidade:

$$E\varepsilon_x = -\frac{y}{c}E\varepsilon_{\text{máx}}$$

Equação 4.11

Utilizando-se a Equação 4.10 na Equação 4.11:

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_{\text{máx}}$$

Equação 4.12

Na qual $\sigma_{\text{máx}}$ representa o máximo valor absoluto da tensão. A tensão normal também varia linearmente com a distância em relação a linha neutra, Figura 4.1b.

Utilizando-se o primeiro resultado do equilíbrio na seção, a Equação 4.1, e substituindo nela a Equação 4.11:

$$\int \sigma_x dA = \int -\frac{y}{c}\sigma_{\text{máx}} dA = -\frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int y dA = 0 \quad \text{ou seja} \quad \int y dA = 0 \quad \text{Equação 4.13}$$

A Equação 4.13 mostra que o primeiro momento estático da seção transversal em relação à linha neutra deve ser igual a zero. Isso significa que uma barra submetida a flexão pura, desde que as tensões permaneçam no regime elástico linear, possui linha neutra passando pelo centro geométrico da seção transversal.

A outra equação de equilíbrio a Equação 4.2, momento em torno do eixo z , o qual deverá ser perpendicular a linha neutra, nos mostra o equilíbrio do momento M aplicado com as tensões σ_x internas, e substituindo nessa equação a Equação 4.11, chega-se a:

$$\int -y \left(-\frac{y}{c} \sigma_{\text{máx}} \right) dA = M$$

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int y^2 dA = M$$

Equação 4.14

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}$$

Na qual o segundo momento estático da seção transversal é conhecido como momento de inércia, I em torno do eixo z contido na superfície neutra.

Substituindo-se a Equação 4.11 na Equação 4.14, chega-se ao valor das tensões na direção x em função do momento fletor aplicado para qualquer altura y .

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

Equação 4.15

A Equação 4.15 é conhecida como equação da flexão para o regime elástico, e a tensão σ_x é chamada de tensão de flexão. Observe que se y é positivo, ou seja, acima da linha neutra, o valor das tensões é negativo, ou seja, compressão. Caso y seja negativo, abaixo da linha neutra, o valor das tensões é positivo indicando tração. Isso é, considerando-se o momento aplicado como positivo, no qual a concavidade da barra fletida é voltada para cima.

Retornando a Equação 4.14, observa-se que a relação I/c depende somente da geometria da seção transversal. Essa relação é conhecida como módulo de resistência e é representada por W . Substituindo W na Equação 4.14, chega-se a:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W}$$

Equação 4.16

A deformação em uma barra fletida por um momento positivo M é medida pela curvatura da linha neutra. Essa curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura ρ e pode ser obtida através de:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_{\text{máx}}}{c}$$

Equação 4.17

Substituindo-se a Equação 4.10 na Equação 4.17, chega-se a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I}$$

Equação 4.18

Ou seja:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Equação 4.19

4.1.4 DEFORMAÇÕES TRANSVERSAIS NA SEÇÃO TRANSVERSAL

Quando foi comentado que uma seção transversal de uma barra submetida a uma flexão pura, permanece plana após a deformação, hipótese de Bernoulli, não foi excluída a possibilidade de existirem deformações laterais no plano da seção. E de fato elas existem, lembrando-se do Item 1.11, Lei de Poisson, corpos submetidos a tensões normais na direção x , por exemplo, possuem deformações nas direções y e z , mesmo com as tensões em y e z sendo nulas.

As deformações nas direções y e z dependem do coeficiente de Poisson e podem ser escritas como:

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$$

Equação 4.20

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

Ou então, utilizando-se a Equação 4.7:



A Equação 4.21 nos indica que a parte da seção transversal localizada acima da linha neutra, $y > 0$, se alongará nas direções y e z , e a parte abaixo da linha neutra, $y < 0$ se encurtará nas direções y e z .

Observe que como essas deformações não existiriam sem a tensão normal e como a tensão normal é independente delas, essas simplesmente são calculadas em função do coeficiente de Poisson, sem nenhum efeito tridimensional ou utilização da lei de Hooke generalizada.

4.1.5 LIMITAÇÕES

As análises apresentadas nessa seção são para flexões puras em vigas prismáticas compostas de materiais homogêneos e trabalhando dentro do seu limite elástico linear. Além disso, o plano de solicitação do momento deveria ser coincidente com o plano de simetria da seção transversal. Caso a viga seja submetida a uma flexão simples, função de um carregamento aplicado gerando momentos fletores e esforços cortantes, a seção transversal que era plana antes da flexão não o será depois da flexão. O empenamento devido às deformações de cisalhamento providas do esforço cortante torna a análise muito mais complexa.

No entanto, uma análise cautelosa revela que as tensões normais calculadas a partir da equação Equação 4.15, não são significativamente alteradas pela presença das forças cortantes e seu empenamento associado. Portanto, pode-se aproximadamente utilizar a teoria da flexão pura para calcular as tensões normais em barras submetidas a flexão simples.

4.2 FLEXÃO DE BARRAS COMPOSTAS DE MATERIAIS HOMOGÊNEOS ASSOCIADOS

As deduções feitas até então consideravam a barra fletida constituída de material único homogêneo com módulo de elasticidade E . Caso essa barra seja constituída de materiais com diferentes comportamentos mecânicos, ou seja, com diferentes módulos de elasticidade, a abordagem precisa ser modificada.

Considere uma barra formada por dois materiais conforme Figura 4.6a, material 1 e material 2.

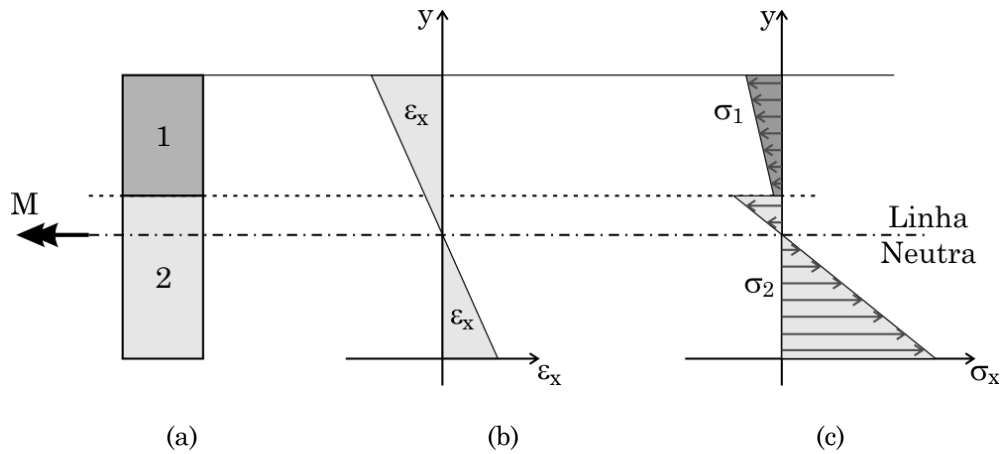


Figura 4.6: Seção transversal da barra fletida constituída por dois materiais (a), distribuição da deformação (b) e da tensão (c) na seção transversal.

Essa barra composta se deformará exatamente da mesma maneira descrita para uma barra homogênea, ou seja, sua deformação continua variando linearmente com y e vale:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad \text{Equação 4.22}$$

Como os módulos de elasticidade dos materiais são diferentes, E_1 e E_2 , as expressões obtidas para o cálculo das tensões normais na seção transversal na área de cada material serão diferentes.

$$\sigma_{x1} = E_1 \varepsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho} \quad \text{Equação 4.23}$$

$$\sigma_{x2} = E_2 \varepsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

As equações de tensão para cada material definem uma distribuição de tensões consistindo de dois segmentos de reta representativos da variação da tensão em cada um dos materiais, conforme ilustra a Figura 4.6c.

Sendo agora um elemento infinitesimal de área localizado no material 1, a força resultante pode ser calculada como:

$$dF_1 = \sigma_{x1} dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA \quad \text{Equação 4.24}$$

Da mesma forma, um elemento infinitesimal de área do material 2 terá uma força resultante como sendo:

$$dF_2 = \sigma_{x2} dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA \quad \text{Equação 4.25}$$

No entanto, a resultante no elemento infinitesimal de área do material 2 pode ser escrita em função da resultante no material 1. Chamando a relação entre os módulos de elasticidade do material 2 e do material 1, de n , ou seja:

$$\frac{E_2}{E_1} = n$$

Equação 4.26

A resultante de força no elemento infinitesimal de área do material 2 é:

$$dF_2 = -\frac{nE_1y}{\rho} dA = -\frac{E_1y}{\rho} ndA$$

Equação 4.27

Observando-se a Equação 4.27 e a Equação 4.24 nota-se que a mesma força dF_2 atuaria em um elemento de área infinitesimal ndA do material 1. Em outras palavras, a resistência a flexão da barra permaneceria a mesma se ambas as partes fossem feitas do primeiro material, desde que a largura da porção inferior, originalmente de material 2, fosse multiplicada por n . Note que esse alargamento, $n > 1$, ou estreitamento, $n < 1$, deve ser feito em uma direção paralela à linha neutra da seção transversal, pois é essencial que a distância y de cada elemento em relação a linha neutra permaneça a mesma. A nova seção transversal obtida é chamada de seção transformada da barra e é ilustrada na Figura 4.7.

Como a seção transformada é equivalente a seção transversal de uma barra feita de um material homogêneo com módulo de elasticidade E_1 , o método descrito anteriormente na seção 4.1.3 pode ser utilizado para a determinação da posição da linha neutra e a tensão normal em todos os pontos da seção transversal transformada.

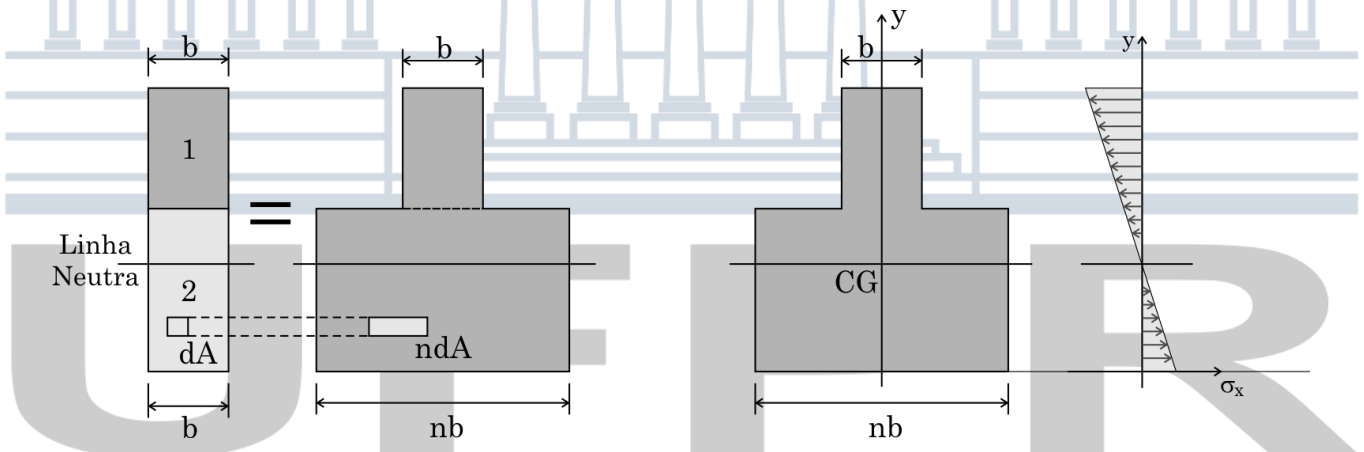


Figura 4.7: Seção transformada da barra.

A linha neutra será traçada através do centro geométrico da seção transformada e a tensão σ_x em qualquer ponto da seção transversal pode ser calculada através da Equação 4.15, ou seja:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I_T}$$

Equação 4.28

Na qual, I_T é o momento de inércia da seção transformada e y a distância a partir da linha neutra ao ponto onde se deseja calcular a tensão.

A obtenção da tensão original da barra composta no material 1 é feita simplesmente com o cálculo da tensão na seção transformada. Já a tensão no material 2 é obtida com a tensão calculada com a Equação 4.28 multiplicada por n , dado pela Equação 4.26.

As deformações de uma barra de material composto podem ser calculadas da mesma maneira, adotando-se a seção transformada em função do material de módulo de elasticidade E_1 . Portanto, a curvatura de uma barra de

material composto é dada pela Equação 4.19, que pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_T} \quad \text{Equação 4.29}$$

4.2.1 VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Um exemplo importante de elementos estruturais constituídos de dois materiais diferentes é encontrado em vigas de concreto armado.

Essas vigas, quando submetidas a momentos fletores positivos, são reforçadas com barras de aço posicionadas a uma pequena distância da face inferior (caso os momentos fossem negativos, essas barras estariam próximas da face superior).

Como a resistência do concreto a tração é muito baixa, a viga sofrerá fissuração na região submetida a tração, ou seja, todo o esforço de tração será resistido pelas barras de aço, enquanto que o esforço de compressão será resistido pela região de concreto acima da linha neutra (momento positivo).

A seção transformada de uma viga de concreto armado é obtida substituindo a área total da seção transversal das barras de aço A_b , por uma área equivalente nA_b , em que n é dado pela Equação 4.26. No entanto, como somente a área de concreto comprimida atua na resistência da viga, apenas parte da seção transversal localizada acima da linha neutra deverá ser utilizada na seção transversal transformada.

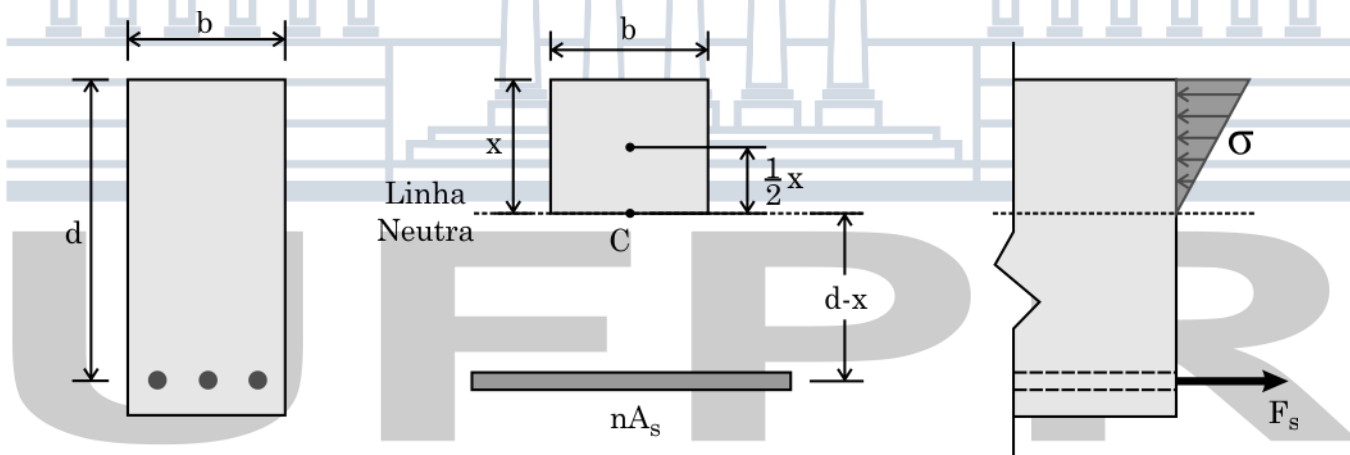


Figura 4.8: Seção transformada de concreto.

A posição da linha neutra é obtida determinando-se a distância x da face superior da viga até o centro geométrico CG da seção transformada. Chamando de b a largura da viga e de d a distância da face superior até o centro geométrico das barras de aço, e sabendo que o momento estático da seção transformada com relação a sua linha neutra deve ser zero, tem-se que:

$$(bx) \frac{x}{2} - nA_{aço}(d - x) = 0 \quad \text{Equação 4.30}$$

Resolvendo a Equação 4.30, chega-se a posição da linha neutra:

$$x = \left(\frac{n}{b} A_{aço} + 2 \frac{n}{b} A_{aço} d \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{n}{b} A_{aço} \quad \text{Equação 4.31}$$

O valor de x também indica a área de concreto que é efetivamente utilizada na resistência da viga. A determinação das tensões é feita conforme explanado anteriormente.

4.3 DEFORMAÇÕES ELASTOPLÁSTICAS NA FLEXÃO PURA - OPCIONAL

Quando foi deduzida da equação da tensão na seção transversal fletida, Equação 4.15, foi considerado que o material seguia a lei de Hooke, ou seja, em nenhum ponto o material excedia o seu limite de proporcionalidade. Caso esse limite seja transposto em algum ponto da seção transversal, ou ainda, caso o material não obedeça a lei de Hooke, ou seja, possui um comportamento não linear no diagrama tensão - deformação, a Equação 4.15 não é mais válida.

Considerando-se o caso de uma barra constituída de um material elastoplástico ideal, que possui um diagrama tensão-deformação conforme ilustrado na Figura 4.9, observa-se que a lei de Hooke é válida até que a tensão atinja o valor de σ_e .

Essa tensão é conhecida como tensão de escoamento do material. Caso a tensão máxima calculada pela Equação 4.14, função do momento aplicado, seja menor ou igual à tensão de escoamento, a distribuição da tensão na seção transversal é calculada de acordo com a Equação 4.15.

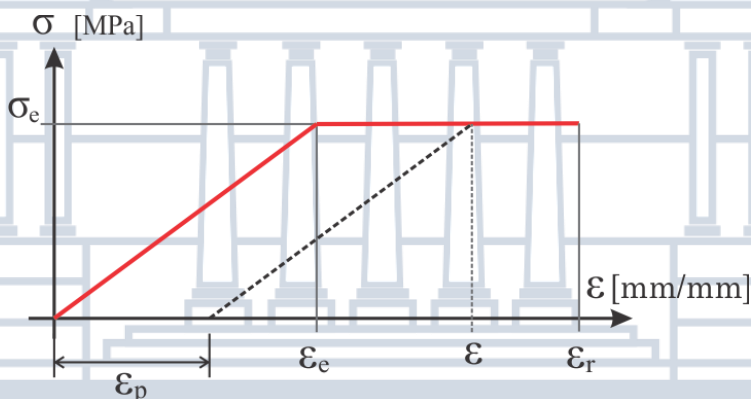


Figura 4.9: Diagrama tensão-deformação elastoplástico idealizado.

Quando a tensão máxima se equivale a tensão de escoamento, pode-se escrever que:

$$M_e = \frac{I}{c} \sigma_e$$

Equação 4.32

Na qual, c é a distância da linha neutra ao extremo da seção transversal medida no plano de solitação e M_e é chamado de momento elástico máximo, sendo o seu valor, o máximo valor de momento para o qual a deformação permanece totalmente elástica.

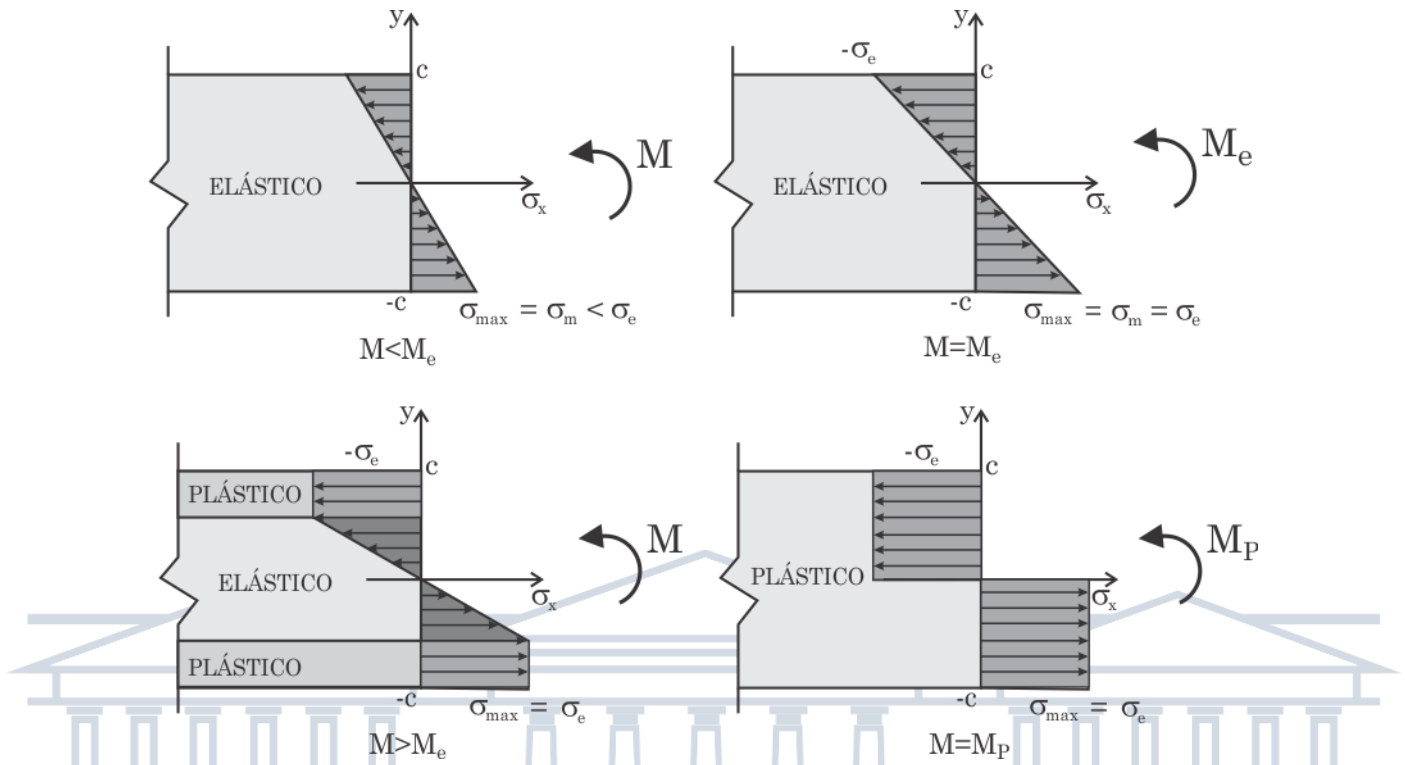


Figura 4.10: Plastificação da seção transversal na flexão.

A medida que o momento fletor aumenta, desenvolvem-se regiões plásticas na seção transversal da barra, nas quais a tensão é uniforme e possui valor igual a $-\sigma_e$ na parte superior e σ_e na parte inferior (momento positivo). Entre essas regiões plásticas, ainda existe um núcleo elástico, no qual a tensão varia linearmente com y .

$$M_e = -\frac{\sigma_e}{y_e} y$$

Equação 4.33

Onde y_e representa metade da altura do núcleo elástico.

A medida que M continua a aumentar, as regiões plásticas expandem-se até que, no limite, a deformação é totalmente plástica. Esse processo é ilustrado na Figura 4.10.

O cálculo do momento elástico máximo M_e , pode ser feito através da Equação 4.32. Lembrando-se da Equação 4.15, pode-se escrever que:

$$\sigma_e = \frac{M_e}{W}$$

Equação 4.34

Na qual, W é o módulo de resistência elástico da seção transversal (I/c).

O momento plástico, da mesma forma que o momento elástico máximo, pode ser calculado como:

$$\sigma_e = \frac{M_p}{Z}$$

Equação 4.35

Na qual, Z é conhecido como módulo de resistência plástico da seção transversal. O módulo de resistência plástico pode ser calculado como:

$$Z = \frac{1}{2}Ad$$

Equação 4.36

Onde A é a área da seção transversal e d é a distância entre o centro geométrico da região comprimida e o centro geométrico da região tracionada. A Figura 4.11 ilustra essa ideia para um momento positivo.

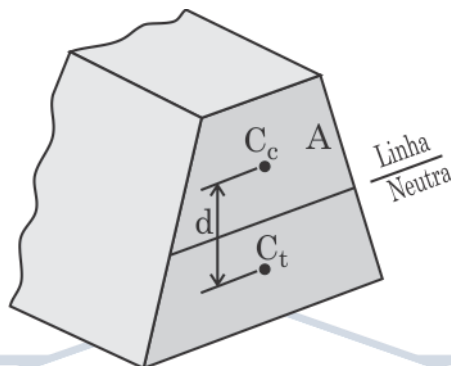


Figura 4.11: Distância d.

Os momentos elástico máximo e plástico podem ser relacionados entre si, assim como o módulo de resistência elástico e plástico, obtendo-se assim, uma constante conhecida como fator de forma, k, da seção transversal.

$$k = \frac{M_p}{M_e} = \frac{Z}{W}$$

Equação 4.37

4.4 FLEXÃO OBLÍQUA

É o caso da flexão pura em que o plano de solitação não coincide com nenhum dos eixos de simetria da seção transversal. Quando foi desenvolvida a equação da tensão axial na flexão pura, foi considerado que a seção transversal fosse simétrica em relação a um plano e que esse plano necessariamente deveria ser o plano que contem o momento fletor. As seções transversais que atendem a essa consideração são limitadas, por isso será definida uma equação para tensão para qualquer seção transversal.

No caso do plano de solitação não coincidir com algum eixo de simetria da seção transversal, pelo fato da solitação estar inclinada em relação ao eixo horizontal ou pelo fato de não existir eixo de simetria na seção transversal, a linha neutra da seção não coincidirá mais com a direção do momento, conforme Figura 4.12.

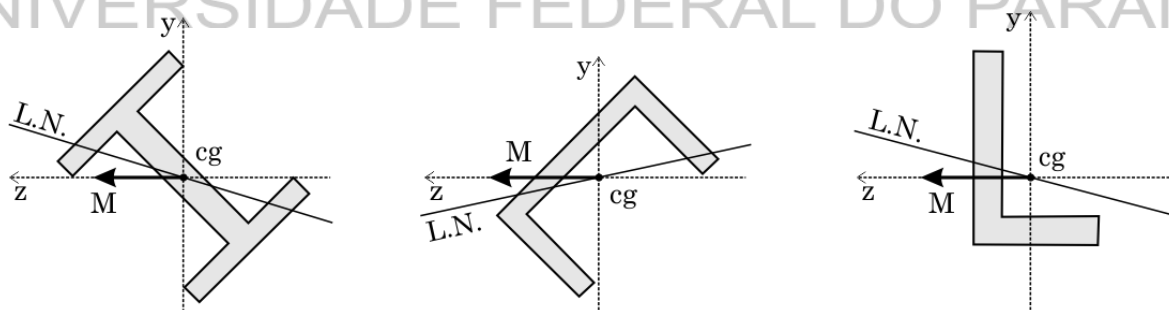


Figura 4.12: Eixos de solitação para diversas seções transversais.

Considerando inicialmente, uma barra com um eixo vertical de simetria, submetida ao momento fletor M atuando em um plano que forma um ângulo θ com a vertical, conforme Figura 4.13.

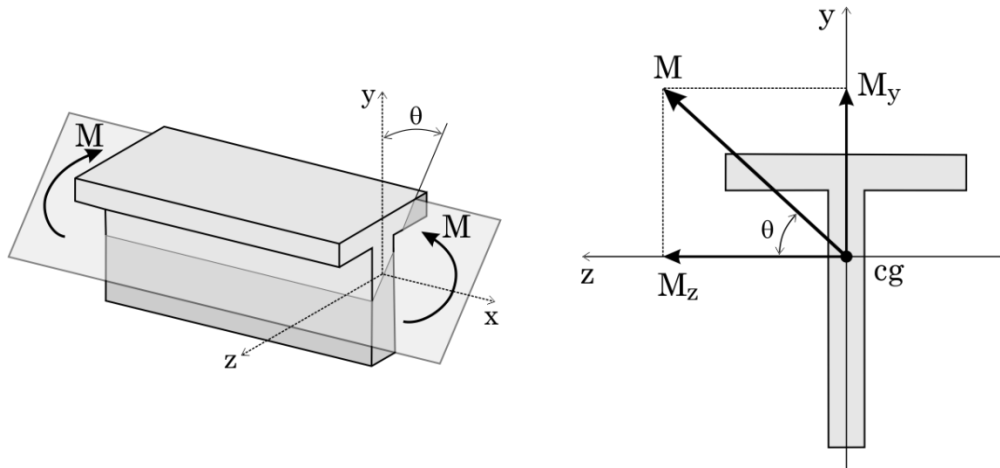


Figura 4.13: Seção transversal com um eixo de simetria e momento inclinado.

O momento M , representativo dos esforços de uma seção transversal da barra, estará ao mesmo ângulo θ do eixo horizontal z . Decompondo-se esse momento nas direções y e z escreve-se:

$$M_z = M \cos \theta \quad M_y = M \sin \theta \quad \text{Equação 4.38}$$

Como os eixos y e z são eixos principais de inércia da seção transversal, pode-se utilizar a Equação 4.15 para determinar as tensões resultantes da aplicação de qualquer um dos momentos representados por M_y e M_z . A componente M_z do momento M gera tensões axiais iguais a:

$$\sigma_{x,z} = -\frac{M_z y}{I_z} \quad \text{Equação 4.39}$$

O sinal negativo se deve ao fato de que se tem compressão acima do plano xz ($y > 0$) e tração abaixo ($y < 0$). A componente M_y do momento M , gera tensões:

$$\sigma_{x,y} = \frac{M_y z}{I_y} \quad \text{Equação 4.40}$$

E o sinal positivo se deve ao fato de que se tem tração à esquerda do plano xy ($z > 0$) e compressão à direita ($z < 0$).

As tensões totais provocadas pelo momento M aplicado são obtidas através da superposição dos efeitos, somando-se as tensões resultantes das componentes M_y e M_z do momento M .

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad \text{Equação 4.41}$$

Quando a seção transversal for assimétrica, ou seja, não existem eixos de simetria, a Equação 4.41 também pode ser utilizada para se determinar as tensões em função dos eixos principais de inércia.

A Equação 4.41 só é válida se forem satisfeitas as condições de aplicabilidade do princípio da superposição dos efeitos, ou seja, ela não poderá ser empregada se as tensões combinadas excederem o limite de proporcionalidade do material, ou se as deformações provocadas por um dos momentos componentes afetar de forma considerável a

distribuições de tensões provocada pelo outro.

A Equação 4.41 mostra que a distribuição de tensões provocada pela flexão oblíqua é linear. No entanto, conforme já comentado, a linha neutra não coincidirá com a direção do momento fletor. Como a tensão normal é zero em qualquer ponto da linha neutra, a equação que a define pode ser obtida fazendo-se $\sigma_x=0$ na Equação 4.41.

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \tag{Equação 4.42}$$

Resolvendo-se para y e utilizando a Equação 4.38.

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta \right) z \tag{Equação 4.43}$$

Que indica uma reta de inclinação m:

$$m = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta \tag{Equação 4.44}$$

Portanto, o ângulo φ que essa reta forma com o eixo x é definido por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta \tag{Equação 4.45}$$

Na qual θ é o ângulo que o momento M forma com o mesmo eixo z. Como I_z e I_y são positivos, θ e φ têm o mesmo sinal. Além disso, notamos que $\varphi > \theta$ quando $I_z > I_y$. Assim, a linha neutra está sempre localizada entre o vetor momento fletor M e o eixo principal² correspondente ao momento mínimo de inércia.

4.5 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

O conceito de energia de deformação já foi exposto no item 3.5. Na flexão pura, o conceito continua o mesmo, no entanto como a distribuição de tensões na seção transversal não é mais constante seu cálculo se modifica.

Considere a viga da Figura 4.14 submetida ao carregamento q e F ilustrado, adotando uma seção qualquer na viga a uma distância x da extremidade A, na qual atua um momento fletor M, desprezando-se o efeito da força cortante, ou seja, somente flexão pura e levando em conta somente tensões normais, substituindo-se a Equação 4.15, tensões normais na flexão, na Equação 3.22, energia de deformação elástica, chega-se a:

² Eixos principais de inércia podem ser obtidos por: $\operatorname{tg} \alpha = (I_z - I_1)/I_{zy}$, sendo I_{zy} o produto de inércia, α o ângulo que localiza a direção do eixo de máximo momento de inércia em relação ao eixo z e I_1 o máximo momento de inércia dado por: $I_1 = (I_z + I_y)/2 + \sqrt{[(I_z - I_y)/2]^2 + I_{zy}^2}$, e por: $\operatorname{tg} \beta = (I_z - I_2)/I_{zy}$, β o ângulo que localiza a direção do eixo de mínimo momento de inércia em relação ao eixo z e I_2 o mínimo momento de inércia dado por: $I_2 = (I_z + I_y)/2 - \sqrt{[(I_z - I_y)/2]^2 + I_{zy}^2}$

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV \quad \text{Equação 4.46}$$

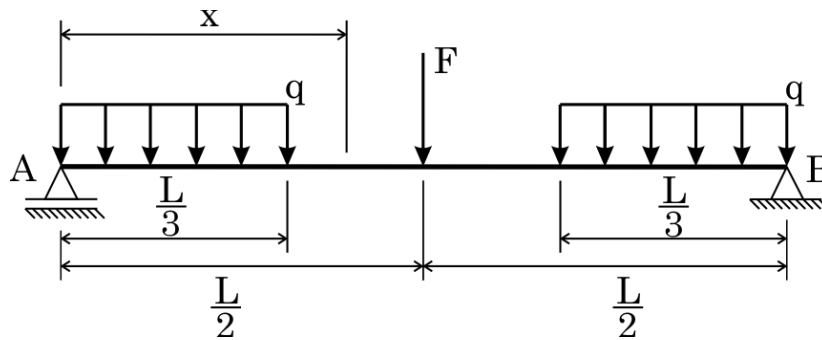


Figura 4.14: Viga simplesmente apoiada.

Fazendo $dV = dA dx$, em que dA representa um elemento de área da seção transversal e lembrando que $M^2/2EI^2$ é uma função apenas de x , tem-se:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int y^2 dA \right) dx \quad \text{Equação 4.47}$$

Sabendo-se que a integral dentro dos parênteses representa o momento de inércia I da seção transversal e, relação a sua linha neutra, pode-se escrever que:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad \text{Equação 4.48}$$

Por exemplo, a energia de deformação para a viga da Figura 4.14, para uma solicitação de momento a uma distância x do ponto A, na região indicada na figura, é dada por:

$$U = \frac{L^3}{5832EI} (q^2 L^4 - 18q^2 L^3 - 27qL^2 F + 108q^2 L^2 + 324qLF + 243F^2) \quad \text{Equação 4.49}$$

4.6 ESTUDO DA LINHA ELÁSTICA

Na seção 4.1.3 vimos que a curvatura de uma barra fletida pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \text{Equação 4.50}$$

Na qual ρ é o raio de curvatura da barra fletida. Essa equação é válida para qualquer seção transversal de uma viga submetida a carregamentos transversais, desde que o princípio de Saint-Venant seja aplicável. No entanto, tanto o momento fletor quanto a curvatura irão variar na barra. Reescrevendo-se a Equação 4.50 com o momento em função de x , tem-se:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}$$

Equação 4.51

Como exemplo, considere a viga em balanço de comprimento L da Figura 4.15, submetida a uma carga concentrada P na extremidade livre.

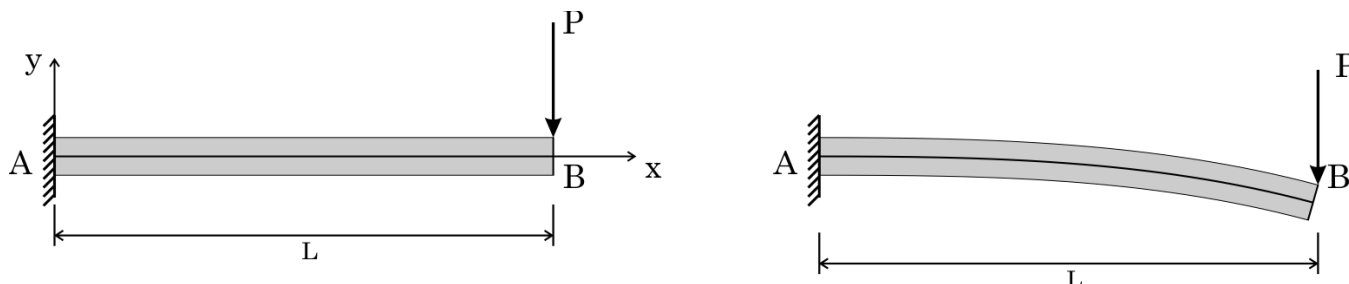


Figura 4.15: Curvatura de uma viga em balanço com carga concentrada.

A variação do momento nessa viga é dada pela expressão:

$$M(x) = -Px$$

Equação 4.52

Substituindo-se a Equação 4.52 na Equação 4.51, encontra-se a curvatura da superfície neutra para a viga em questão:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-Px}{EI}$$

Equação 4.53

Observa-se que a curvatura varia linearmente com x , desde zero na extremidade (onde o raio de curvatura é infinito) até $-PL/EI$ na extremidade engastada, na qual $|\rho| = EI/PL$.

Considere agora a viga biapoiada com um balanço AD da Figura 4.16 que suporta duas forças concentradas. No diagrama de corpo livre, observa-se que as reações nos apoios são iguais a 1 kN em A e 5 kN em C.

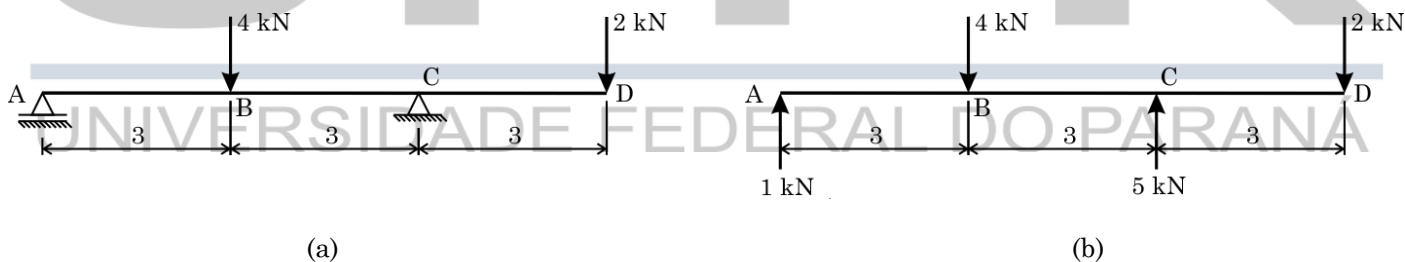


Figura 4.16: Viga biapoiada com balanço (a) e seu diagrama de corpo livre (b).

Traçando-se o diagrama dos momentos fletores, observa-se que ambos, os momentos fletores e a curvatura da viga são zero nas extremidades, assim como no ponto E localizado em $x = 4$ m. Nota-se também que o maior valor da curvatura (ou menor valor do raio de curvatura) ocorre no apoio C, no qual o momento é máximo.

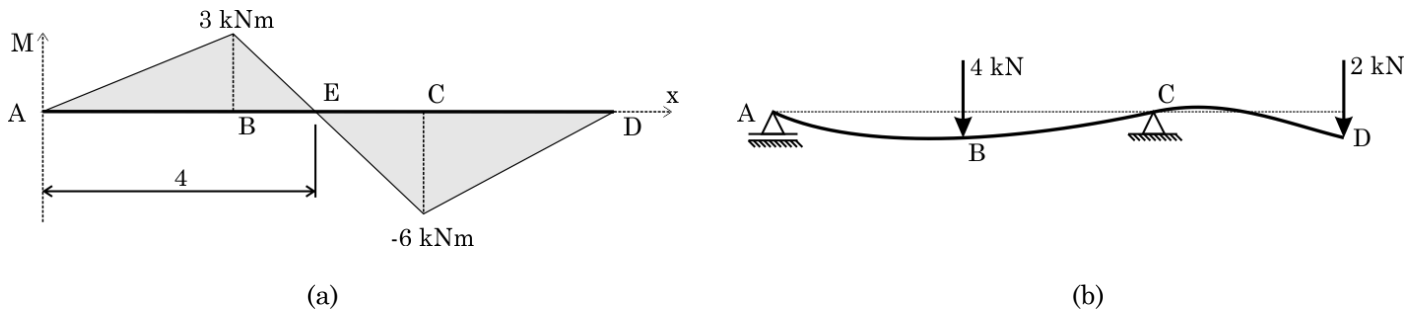


Figura 4.17: O diagrama de momentos fletores (a) e a deformada (b).

Com base nas informações da curvatura, pode-se ter uma boa ideia sobre a forma da deformada da viga. No entanto, para se obter a deformada em todos os pontos da viga é necessário relacionar-se a deflexão da viga, y , com a distância x contada de alguma origem fixa. Essa relação será conhecida como equação da linha elástica, e nada mais é que a equação da curva na qual o eixo da viga é transformado sob determinado carregamento.

4.6.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA

A equação diferencial da linha elástica é obtida em função da curvatura de uma superfície, que pode ser escrita em um ponto $Q(x,y)$ como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Equação 4.54}$$

Na qual as derivadas no numerador e no denominador são a segunda e a primeira derivada da função $y(x)$, respectivamente, representada por uma curva. No caso da linha elástica de uma viga, a inclinação definida pela primeira derivada da função é muito pequena, por estar se considerando pequenos deslocamentos e, portanto, seu quadrado é desprezível se comparado com a unidade. Pode-se reescrever a Equação 4.54 como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{Equação 4.55}$$

Substituindo-se essa Equação 4.55 na Equação 4.51, tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \text{Equação 4.56}$$

Que é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Essa equação diferencial governa os deslocamentos na linha elástica e é conhecida como equação diferencial da linha elástica.

O produto EI é conhecido como rigidez à flexão e, caso varie ao longo da viga, como no caso de uma viga com seção transversal variável (altura ou largura), deve ser expresso também em função de x (no caso o momento de inércia seria função de x). Caso a rigidez seja constante, por exemplo, seção transversal retangular constante, pode-se então multiplicar ambos os lados da Equação 4.56 e integrar em x .

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

Equação 4.57

Onde C_1 é uma constante de integração. Chamando de $\theta(x)$ o ângulo medido em radianos, conforme Figura 4.18, que a tangente da linha elástica faz com a horizontal em um ponto Q , e lembrando que esse ângulo é muito pequeno (pela consideração de pequenos deslocamentos), pode-se escrever que:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \cong \theta(x)$$

Equação 4.58

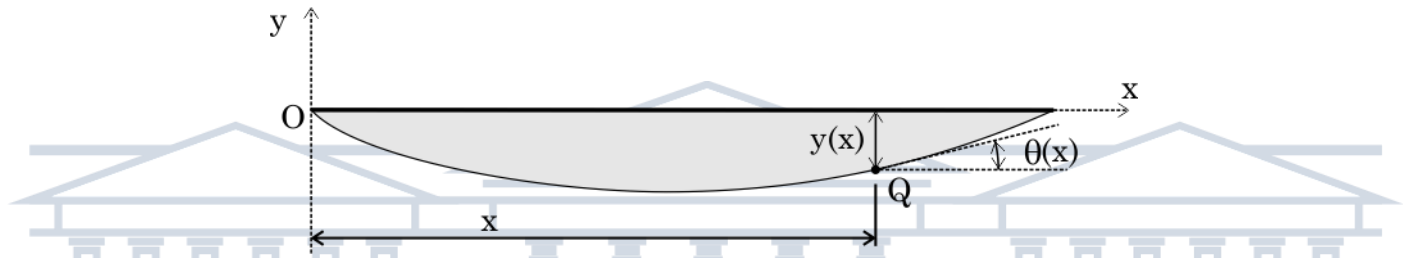


Figura 4.18: Deslocamentos na linha elástica.

Assim, pode-se reescrever a Equação 4.57 em função da rotação.

$$EI\theta(x) = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

Equação 4.59

Voltando a Equação 4.57 original e integrando ambos os membros:

$$EIy = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 + C_2$$

Equação 4.60

Sendo C_2 uma segunda constante de integração. Se não fosse pelo fato das constantes indeterminadas até o momento, a Equação 4.60 definiria a deflexão y da viga em qualquer ponto e a Equação 4.59 definiria de modo semelhante a inclinação da viga.

As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno ou, mais precisamente, pelas condições impostas à viga pelos seus apoios.

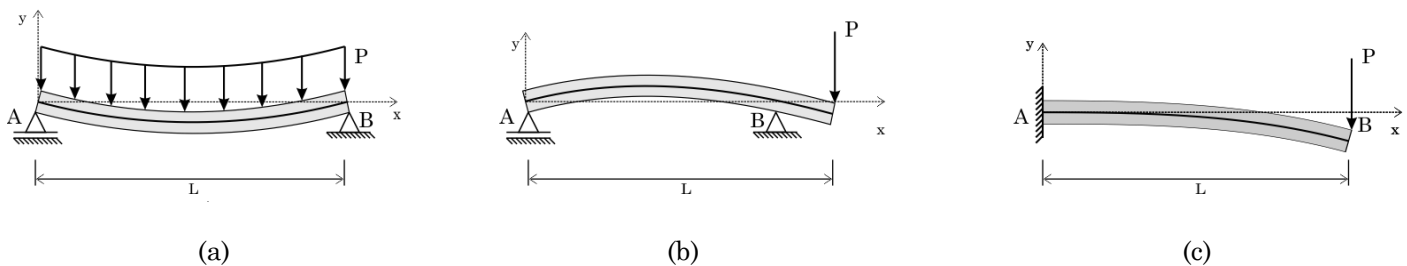


Figura 4.19: Viga biapoiada (a), viga biapoiada com balanço (b) e viga em balanço (c).

No caso de vigas estaticamente determinadas, como por exemplo, viga biapoiada, viga biapoiada com balanço e viga em balanço, mostradas respectivamente na Figura 4.19, as condições de contorno, considerando-se o referencial adotado, para os dois primeiros casos são que a deflexão em $x = 0$ e $x = L$ são zero, ou seja, $y = 0$.

Substituindo-se essas duas condições na Equação 4.60, obtêm-se duas equações que fornecerão os valores de C_1 e C_2 . Para o último caso, a viga em balanço, as condições de contorno são que o deslocamento e a inclinação ou rotação em $x = 0$, dever ser iguais à zero. Substituindo-se essas duas condições nas Equação 4.60 e Equação 4.59 respectivamente, obtêm-se duas equações novamente para o cálculo das constantes C_1 e C_2 .

4.6.2 ESTUDO DA LINHA ELÁSTICA ATRAVÉS DOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLETORES

