2 ESTADO TRIPLO DE TENSÕES

No ponto genérico de um corpo carregado, para cada plano que o contém, define-se um vetor tensão. Como o ponto contém uma família de planos, tem-se também uma família de vetores tensão nesse ponto. A esta família de vetores tensão, dá-se o nome de estado de tensão no ponto.

O estado de tensões no ponto, fica perfeitamente definido, conhecendo-se as tensões em 3 planos que passam pelo ponto.

2.1 TENSÕES NORMAIS E DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS NO PONTO GENÉRICO

Seja o corpo da Figura 2.1 submetido a um estado de carregamento multiaxial. Extraindo-se desse corpo um elemento volumétrico infinitesimal e, através da superposição dos efeitos, considerando-se apenas a ação das tensões normais com a atuação de uma delas por vez, pode-se escrever uma relação entre todas as tensões e deformações do corpo em função da lei de Hooke e do coeficiente de Poisson.

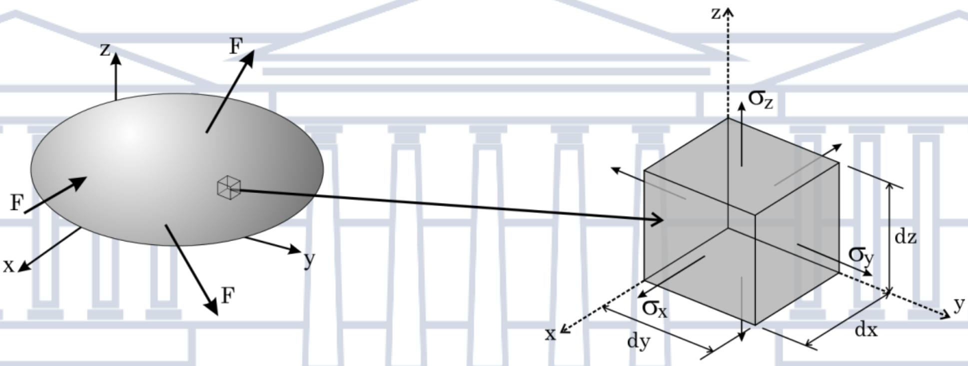

Figura 2.1: Tensões Volumétricas.

Considerando apenas σ_x agindo:

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon'_y = \varepsilon'_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \text{Equação 2.1}$$

Considerando apenas σ_y agindo:

$$\varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon''_x = \varepsilon''_z = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \text{Equação 2.2}$$

Considerando apenas σ_z agindo:

$$\varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon'''_x = \varepsilon'''_y = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \text{Equação 2.3}$$

Aplicando-se o princípio superposição dos efeitos, considerando todos os efeitos conjuntos de todas as tensões normais, pode-se escrever para as deformações normais:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \text{Equação 2.4}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_z + \varepsilon''_z + \varepsilon'''_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]$$

Nas quais, E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson.

Dessa forma, calculam-se os efeitos das tensões nas três tensões normais nas três deformações normais.

2.2 TENSÕES TANGENCIAIS E DISTORÇÕES ANGULARES NO PONTO GENÉRICO

Considerando-se, agora, somente as tensões de cisalhamento atuando no elemento infinitesimal, pode-se escrever em função da lei de Hooke, relações para as todas as tensões de cisalhamento e todas as deformações de cisalhamento, considerando-se a atuação de uma tensão cisalhante por vez.

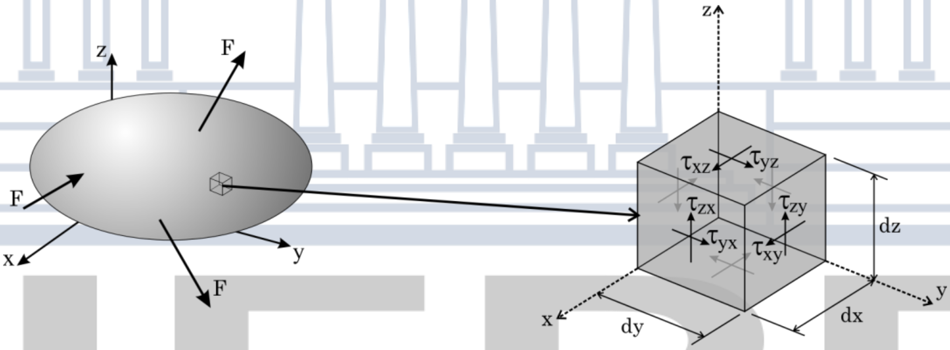

Figura 2.2: Tensões de Cisalhamento.

Considerando apenas as tensões tangenciais τ_{xy} e τ_{yx} agindo no paralelepípedo elementar:

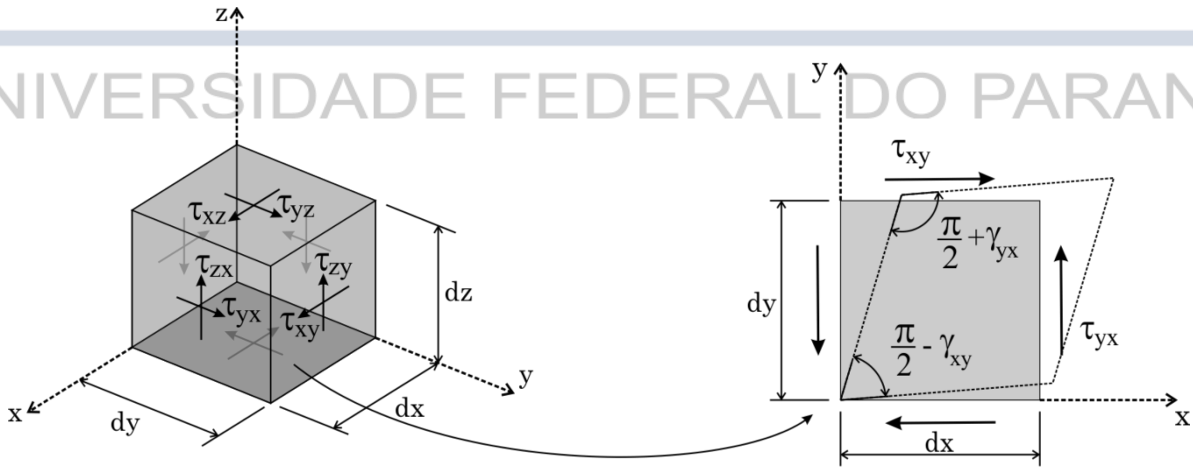

Figura 2.3: Tensões e deformações de cisalhamento no plano XY.

Aplicando a condição de equilíbrio $\sum M_0 = 0$, resulta:

$$\tau_{xy}dxdzdy - \tau_{yx}dydzdx = 0$$
$$\therefore \tau_{xy} = \tau_{yx}$$
Equação 2.5

E, por analogia:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$
Equação 2.6

Estas relações são conhecidas como Teorema de Cauchy ou Teorema das Tensões Recíprocas e pode ser enunciado como:

"As tensões tangenciais sobre dois planos ortogonais são recíprocas".

Isto é, existindo tensões tangenciais τ sobre um plano, existirão tensões tangenciais τ, também no plano ortogonal ao primeiro, de modo que seus sentidos se aproximam ou se afastam da aresta comum aos dois planos. Este teorema é consequência das condições de equilíbrio.

A Lei de Hooke aplicada às tensões de cisalhamento e distorções angulares resulta:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$
Equação 2.7

Note que as tensões de cisalhamento e suas respectivas deformações de cisalhamento são independentes das demais componentes de cisalhamento. Além disso, as deformações normais e tensões normais são independentes das deformações e tensões cisalhantes.

2.3 LEI DE HOOKE GENERALIZADA

Considerando o princípio da superposição dos efeitos e sabendo-se que nos planos definidos pelos eixos x, y e z, ocorrem simultaneamente tensões normais e cisalhantes, pode-se escrever uma relação geral entre as tensões e deformações, combinando-se as tensões em um vetor de tensões **σ**, as deformações em um vetor de deformações **ε** e a relação entre essas grandezas em uma matriz conhecida como matriz constitutiva **D**. Essas quantidades vetoriais são escritas de acordo com as equações encontradas anteriormente.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & zeros & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & & \\ & zeros & & & \frac{1}{G} & \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$
Equação 2.8

Ou, de uma forma compacta:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \qquad \text{Equação 2.9}$$

Na Equação 2.9 a relação apresentada, cálculo das deformações em função das tensões, é escrita com a inversa da matriz constitutiva do material, que é definida em função da lei de Hooke que calcula as tensões em função das deformações, ou seja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{Equação 2.10}$$

Sendo que a lei de Hooke generalizada é então escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(\nu+1)(2\nu-1)} \begin{bmatrix} \nu-1 & -\nu & -\nu & & zeros & \\ -\nu & \nu-1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & \nu-1 & & & \\ & & & \frac{2\nu-1}{2} & & \\ & zeros & & & \frac{2\nu-1}{2} & \\ & & & & & \frac{2\nu-1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \text{Equação 2.11}$$

Caso o corpo esteja submetido a uma pressão hidrostática p, que resulta em tensões e deformações normais iguais em todas as direções pode-se relacionar a pressão hidrostática p com a deformação volumétrica do corpo ε, em função do coeficiente de Poisson e do Módulo de Elasticidade, conforme segue.

$$\varepsilon = \frac{(1-2\nu)}{E}p \qquad \text{Equação 2.12}$$

Na qual:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon \end{aligned} \qquad \text{Equação 2.13}$$

2.4 DEFORMAÇÃO NORMAL DO ELEMENTO INFINITAMENTE PEQUENO (DILATAÇÃO CÚBICA)

O volume do elemento sólido infinitesimal, antes de qualquer solicitação é: $V_0 = dxdydz$.

Ao ser solicitado por forças de tração normais às faces N_x, N_y e N_z, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{dydz}, \qquad \sigma_y = \frac{N_y}{dxdz}, \qquad \sigma_z = \frac{N_z}{dxdy} \qquad \text{Equação 2.14}$$

Qualquer que seja o estado de tensões, teremos deformações nas três direções.

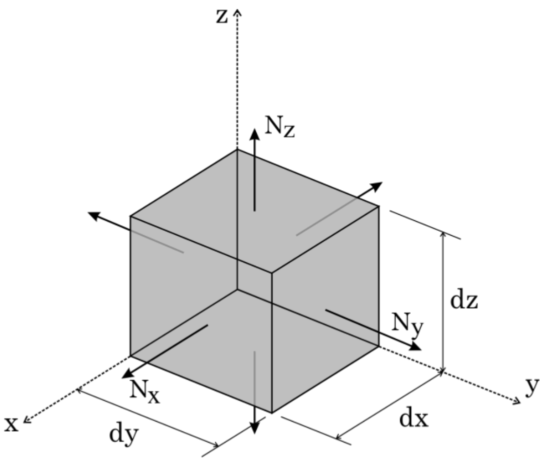

Figura 2.4: Solicitação por forças de tração normais.

Após as deformações, o volume do elemento infinitesimal será (ver Equação 1.6):

$$V = (1 + \varepsilon_x)dx(1 + \varepsilon_y)dy(1 + \varepsilon_z)dz \qquad \text{Equação 2.15}$$

A variação de volume do elemento infinitesimal é $\Delta V = V - V_0$ e, portanto:

$$\Delta V = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dxdydz - dxdydz \qquad \text{Equação 2.16}$$

Sabendo-se que a dilatação cúbica *e* é a relação entre a variação do volume e o volume inicial, ou seja:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} \qquad \text{Equação 2.17}$$

Substituindo-se a Equação 2.16 na Equação 2.17, simplificando-se os termos, expandindo a equação e eliminando os termos de valores não significativos, chega-se a:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad \text{Equação 2.18}$$

Essa equação nos diz que:

"A dilatação cúbica é a soma das deformações específicas nas três direções, qualquer que seja o estado elástico".

A dilatação cúbica também pode ser escrita em função das tensões normais. Da lei de Hooke generalizada tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \text{Equação 2.19}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

Substituindo esses valores de ε_x, ε_y e ε_z, na expressão da dilatação cúbica e rearranjando os termos, Equação 2.18, teremos:

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \qquad \text{Equação 2.20}$$

Corpos incompressíveis (líquidos), a variação volumétrica é igual a zero. Assim é possível calcular o coeficiente de Poisson para esses corpos incompressíveis a partir da Equação 2.20, substituindo-se *e*=0. Como as tensões, nesse caso, são sempre não nulas, chega-se a conclusão que:

$$\frac{1 - 2\nu}{E} = 0 \qquad \text{Equação 2.21}$$

E, portanto:

$$\nu = \frac{1}{2} \qquad \text{Equação 2.22}$$

Que é o máximo valor possível para o coeficiente de Poisson.

2.5 TENSÕES PRINCIPAIS

Todo estado de tensões apresenta três planos nos quais as tensões tangenciais são nulas, restando apenas tensões normais σ_1, σ_2 e σ_3. Estes planos são conhecidos como planos principais e as tensões que lhes correspondem, denominam-se tensões principais.

Esse estado de tensões é obtido rotacionando-se o elemento infinitesimal em função de certos ângulos α, β e θ, respectivamente, até que na nova posição, o elemento infinitesimal apenas contenha tensões normais a suas superfícies.

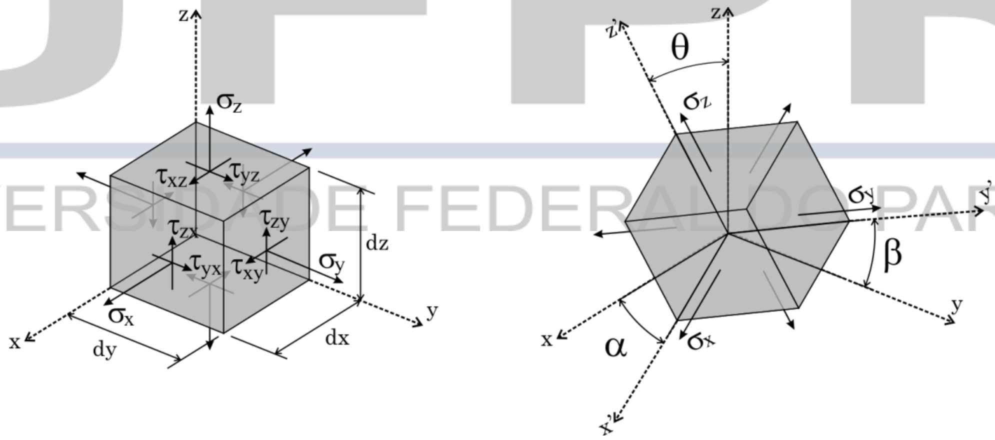

Figura 2.5: Tensões Principais.

2.6 DECOMPOSIÇÃO DO ESTADO DE TENSÃO

Pode-se decompor um estado geral de tensão em dois estados. Um chamado de estado de tensão de mudança de volume ou "hidrostático" e outro de estado de tensão de mudança de forma. Considerando um estado triplo de tensão principal σ_1, σ_2 e σ_3 pode-se escrever:

$$\sigma_1 = p + \sigma'_1$$

$$\sigma_2 = p + \sigma'_2 \qquad \text{Equação 2.23}$$

$$\sigma_3 = p + \sigma'_3$$

No estado de mudança de forma representado pelas tensões linha (σ') a deformação volumétrica é igual à zero, portanto:

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \qquad \text{Equação 2.24}$$

Somando membro a membro, as Equação 2.23 e considerando a Equação 2.24, resulta:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \qquad \text{Equação 2.25}$$

Substituindo-se a Equação 2.25 nas Equação 2.23 e isolando-se as tensões linha, chega-se a:

$$\sigma'_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$

$$\sigma'_2 = \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{3} \qquad \text{Equação 2.26}$$

$$\sigma'_3 = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3}{3}$$

E dessa forma encontram-se os valores das tensões linha para a decomposição de um estado geral de tensões em dois estados, um hidrostático e outro de mudança de forma.