

5 CISALHAMENTO SIMPLES

Conforme visto anteriormente, sabe-se que um carregamento transversal aplicado em uma viga resulta em tensões normais e de cisalhamento em qualquer seção transversal dessa viga. As tensões normais tem como resultante o momento fletor e as tensões de cisalhamento o esforço cortante.

O critério dominante no projeto de uma viga quanto à sua resistência é o máximo valor da tensão normal, ou seja, do momento fletor. No entanto, as tensões de cisalhamento podem ser importantes, particularmente em barras de paredes finas e vigas curtas e grossas.

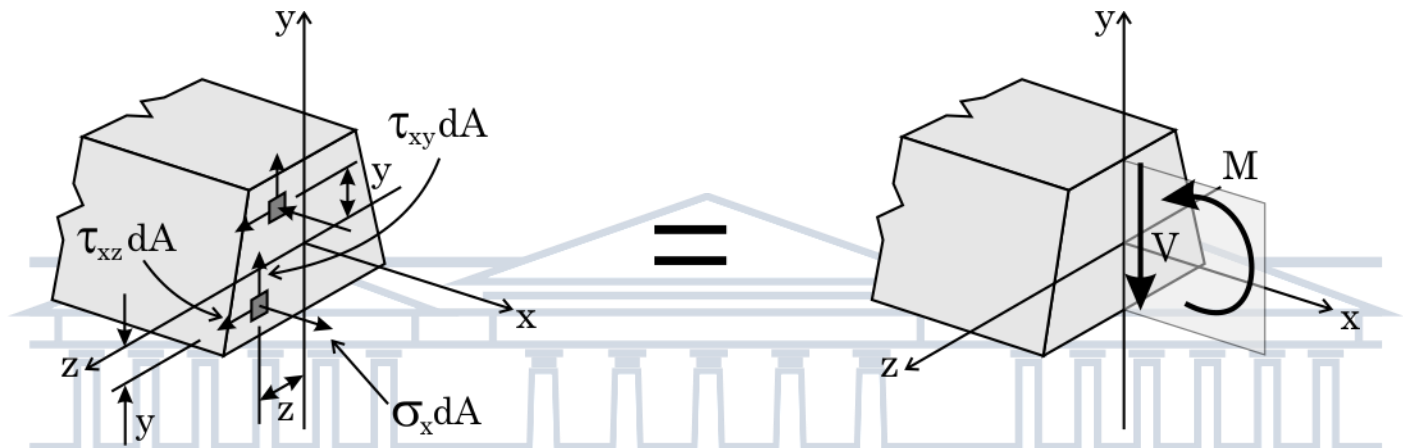


Figura 5.1: Tensões na seção transversal da viga e suas resultantes.

Seis equações podem ser escritas para expressar igualdade das tensões e seus respectivos esforços resultantes. Três envolvem somente a tensão normal σ_x e já foram discutidas na flexão simples. Dentre as outras três, que envolvem as tensões de cisalhamento, uma delas expressa que a soma dos momentos das forças de cisalhamento em relação ao eixo x é zero, e pode ser desconsiderada pela simetria da viga em relação ao plano xy . As outras duas são as seguintes:

$$\int \tau_{xy} dA = -V$$

Equação 5.1

$$\int \tau_{xz} dA = 0$$

Equação 5.2

A primeira equação mostra que devem existir tensões de cisalhamento verticais em uma seção transversal de uma viga sob carregamento transversal. A segunda indica que a tensão de cisalhamento horizontal média em qualquer seção é zero (mas isso não significa que τ_{xz} seja zero em todos os pontos).

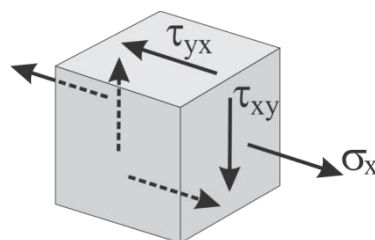


Figura 5.2: Elemento infinitesimal da viga extraído no plano vertical de simetria.

Avaliando um elemento infinitesimal da viga, em um ponto no plano vertical de simetria, onde τ_{xz} é zero, conforme ilustra a Figura 5.2, observa-se que as tensões σ_x e τ_{xy} são aplicadas em cada uma das duas faces perpendiculares ao eixo x . No entanto, de acordo com o Teorema de Cauchy, visto anteriormente, sabe-se que as

tensões tangenciais sobre dois planos ortogonais são recíprocas, ou seja, também existem tensões de cisalhamento nas faces horizontais do mesmo elemento. Portanto, também existem tensões de cisalhamento longitudinais em qualquer elemento submetido a um carregamento transversal. Isso pode ser melhor explicado considerando-se a viga apresentada na Figura 5.3a.

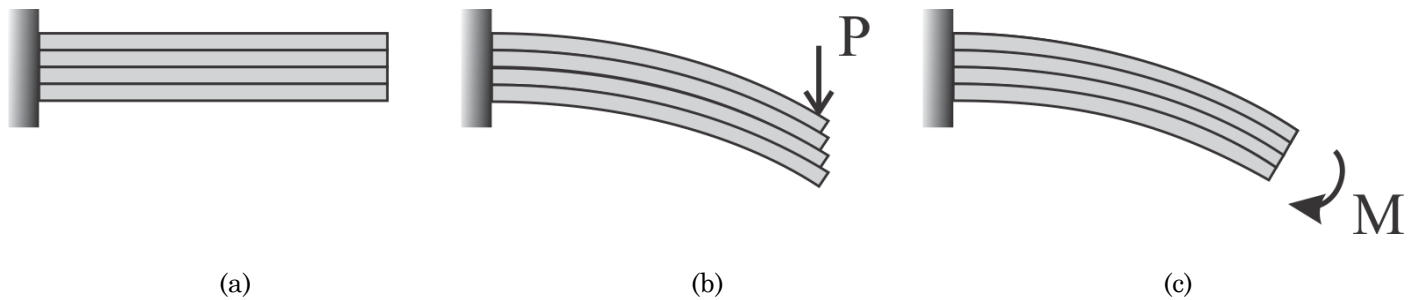


Figura 5.3: Viga em balanço constituída de pranchas separadas (a), viga prancha submetida a um carregamento transversal (b) e viga prancha submetida à flexão pura (c).

Quando um carregamento transversal P é aplicado na extremidade da viga, observa-se que as pranchas deslizam umas em relação às outras, conforme ilustra a Figura 5.3b. No entanto, se um momento é aplicado à extremidade da viga, conforme Figura 5.3c, as várias pranchas se flexionarão em arcos de círculos concêntricos e não deslizarão umas em relação às outras, verificando-se assim o fato de que não existe cisalhamento quando uma viga está submetida à flexão pura.

Embora o deslizamento não ocorra em vigas de material homogêneo e coesivo como o aço, a tendência de deslizamento existe, mostrando que ocorrem tensões em planos longitudinais, bem como em planos transversais. Por exemplo, no caso de vigas de madeira, as quais possuem resistência ao cisalhamento menor entre as fibras, a falha ocorrerá ao longo do plano horizontal.

5.1 FORÇA CORTANTE NA FACE HORIZONTAL DE UM ELEMENTO DE VIGA

Considere uma viga prismática AB com um plano vertical de simetria que suporta várias forças concentradas e distribuídas, conforme ilustra a Figura 5.4.

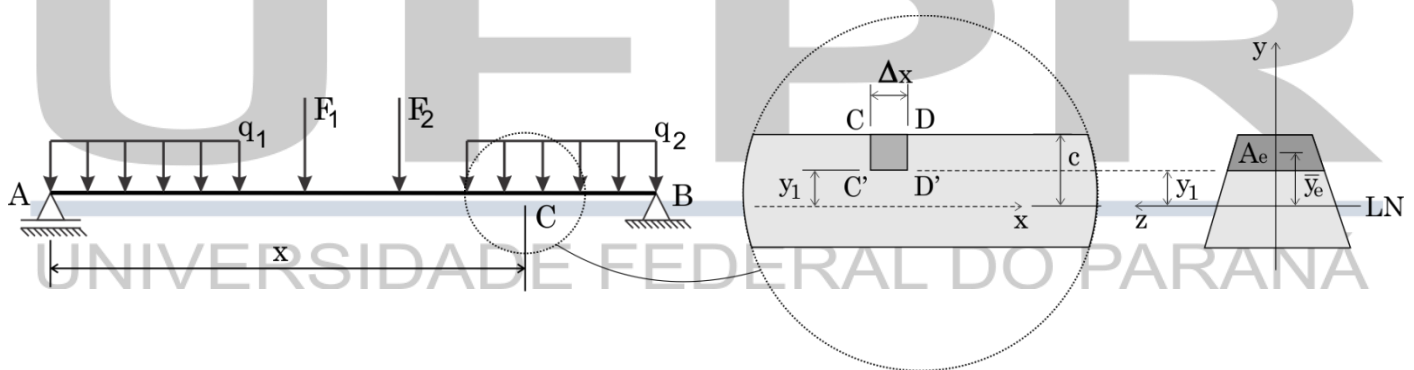


Figura 5.4: Viga com seção transversal prismática (trapezoidal) submetida a diversas cargas.

A uma distância x da extremidade A, foi extraído um elemento CDEF de comprimento Δx que se estende por sua largura desde a sua superfície superior até um plano horizontal localizado a uma distância y1 da linha neutra. As resultantes atuantes nesse elemento consistem em forças cortante vertical V'_C e V'_D, uma força constante horizontal ΔH aplicada na face inferior do elemento, forças elementares horizontais normais σ_C dA e σ_D dA e uma força w Δx, conforme ilustra a Figura 5.5. O equilíbrio das forças na direção x é:

$$\sum F_x = 0 \quad \Delta H + \int_{A_e} (\sigma_C - \sigma_D) dA_e = 0 \quad \text{Equação 5.3}$$

Na qual a integral se estende sobre a área A_e sombreada da seção localizada acima da linha $y=y_1$.

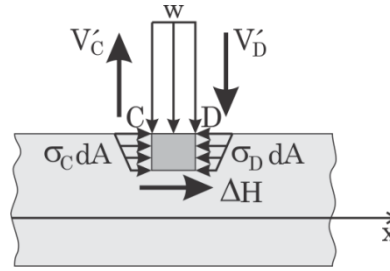


Figura 5.5: Esforços e resultantes no elemento de viga.

Resolvendo a equação para ΔH e usando a equação das tensões de flexão, Equação 4.15 para expressar as tensões normais em termos dos momentos fletores em C e D, chega-se a:

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I_z} \int_{A_e} y dA_e \quad \text{Equação 5.4}$$

A integral representa o momento estático em relação à linha neutra da parte sombreada de área A_e da seção transversal da viga que está localizada acima da linha $y=y_1$ e vale $\bar{y}_e A_e$, sendo $\bar{y}_e$ a posição do centroide da área A_e . Utilizando a relação entre momento fletor e esforço cortante (derivada do momento é o cortante), pode-se reescrever o incremento no momento entre C e D como:

$$M_D - M_C = \Delta M = \frac{dM}{dx} \Delta x = V \Delta x \quad \text{Equação 5.5}$$

Substituindo na Equação 5.4, chega-se a expressão para o esforço cortante horizontal.

$$\Delta H = \frac{V}{I_z} \bar{y}_e A_e \Delta x \quad \text{Equação 5.6}$$

Lembrando que I é o momento de inércia de toda a seção transversal. Nota-se que o valor do momento estático $\bar{y}_e A_e$, é máximo para $y_1 = 0$, pois os elementos da seção transversal localizados acima da linha neutra contribuem positivamente para o momento estático, enquanto que os elementos abaixo da linha neutra contribuem negativamente, em outras palavras, $\bar{y}_e$ tem o sinal definido pelo sentido do eixo y .

A força cortante horizontal por unidade de comprimento, representada pela letra f , é obtida dividindo-se ambos os lados da Equação 5.6 por Δx :

$$f = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{V}{I_z} \bar{y}_e A_e \quad \text{Equação 5.7}$$

Lembrando que f é sempre calculado em uma posição da seção transversal localizada a uma distância y_1 da linha neutra. A área acima dessa posição (ou abaixo dependendo de y_1) é a área A_e e a posição do seu centroide $\bar{y}_e$. Essa força horizontal por unidade de comprimento é conhecida como fluxo de cisalhamento.

5.2 DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES DE CISALHAMENTO EM UMA VIGA

Considerando a mesma viga da seção anterior com plano vertical de simetria, submetida a várias forças concentradas ou distribuídas, um elemento de comprimento Δx possui em sua face inferior, localizada a uma distância y_1 da linha neutra, uma força cortante horizontal ΔH . A tensão de cisalhamento média τ_{med} nessa face do elemento é obtida dividindo-se ΔH pela área ΔA da correspondente face, Figura 5.6. Observando que $\Delta A = t \Delta x$, sendo t a largura do elemento na face em y_1 , pode-se escrever:

$$\tau_{med} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{V}{I_z} \bar{y}_e A_e \frac{\Delta x}{t \Delta x} = \frac{V}{I_z t} \bar{y}_e A_e \quad \text{Equação 5.8}$$

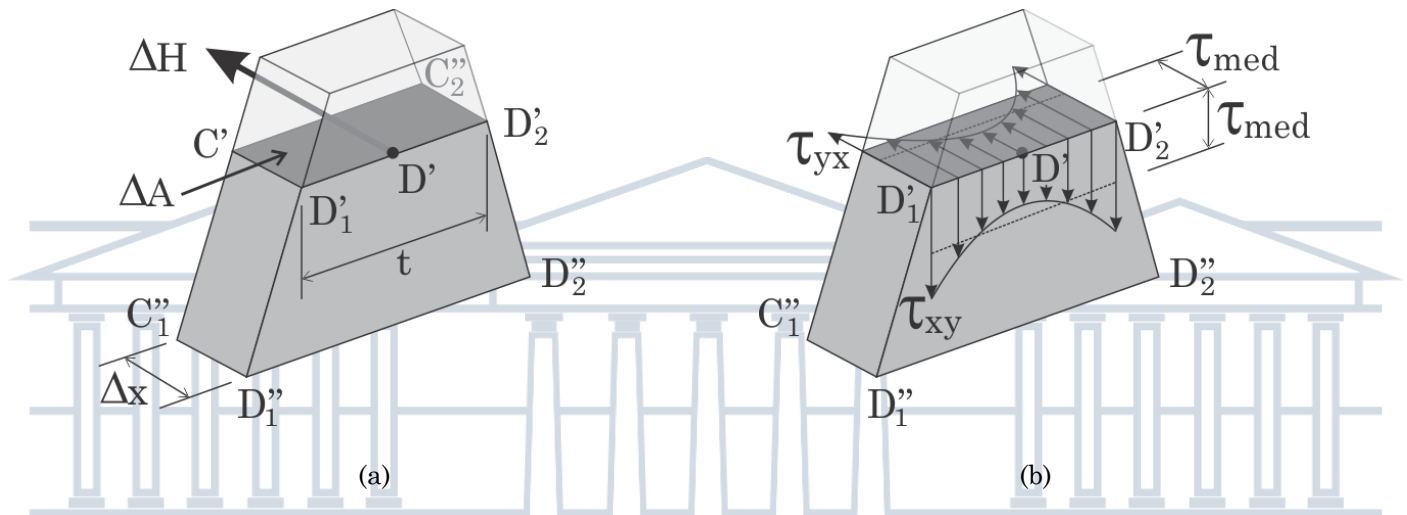


Figura 5.6: Corte em y_1 (a) e distribuições das tensões ao longo da borda $D'1D'2$ (b).

Observa-se que, como as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} ocorrem em um plano vertical e horizontal, respectivamente, as mesmas são iguais e a Equação 5.8 também representará o valor médio de τ_{xy} ao longo da linha $D'1D'2$. Ainda, nas faces superior e inferior da viga, a tensão de cisalhamento τ_{xy} é igual à zero, pois não há forças exercidas nessas faces. A tensão de cisalhamento é maior nos pontos $D'1$ e $D'2$ que no ponto D' .

5.3 TENSÕES DE CISALHAMENTO EM VIGAS RETANGULARES

Em casos especiais, a teoria da elasticidade mostra que, para uma viga de seção retangular de largura b e altura h , e desde que $b \leq h/4$, o valor da tensão de cisalhamento nos extremos da superfície neutra na seção transversal, não excede em mais de 0,8 % o valor médio da tensão calculada ao longo da linha neutra.

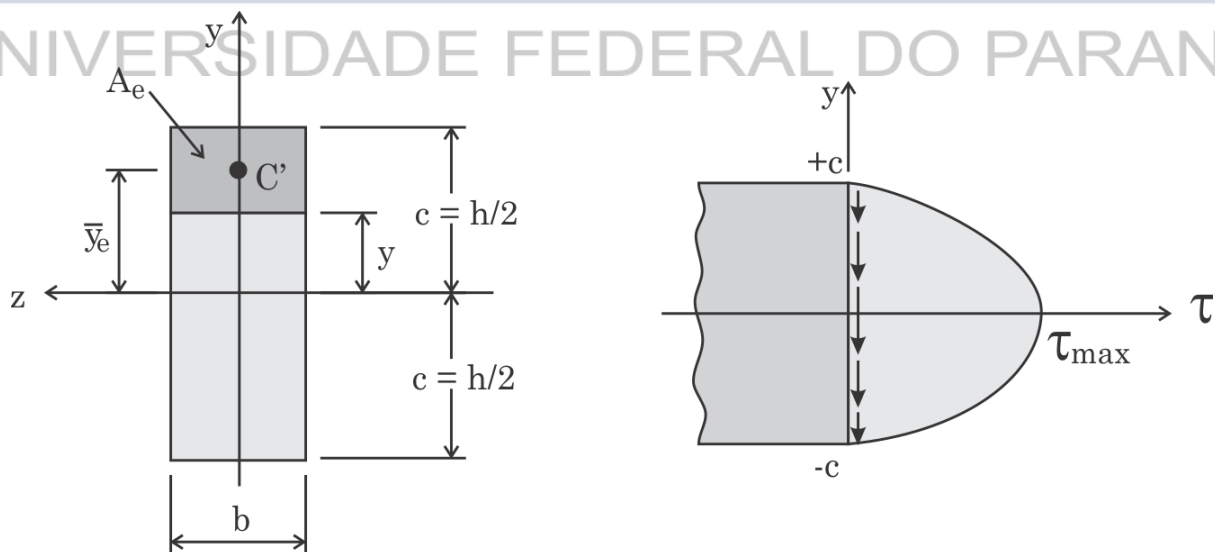


Figura 5.7: Viga retangular com a variação da tensão de cisalhamento na seção transversal.

Em aplicações práticas, pode-se utilizar a tensão de cisalhamento média para se determinar a tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção transversal de vigas retangulares estreitas.

Observando que a distância da linha neutra até o centroide C' de A é $\bar{y} = 1/2 (c + y)$ pode-se escrever:

$$\bar{y}_e A_e = b(c - y) \frac{1}{2} (c + y) = \frac{1}{2} b(c^2 - y^2) \quad \text{Equação 5.9}$$

Utilizando o momento de inércia de uma seção transversal retangular calculado no eixo z , $I_z = bh^3/12$, e que a variável t da Equação 5.8 é igual a b na viga retangular, chega-se a:

$$\tau_{xy} \cong \tau_{med} = \frac{V}{I_z t} \bar{y}_e A_e = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V \quad \text{Equação 5.10}$$

Notando, da Figura 5.7, que a área da seção transversal pode ser escrita como $A = 2cb$ e que $c = h/2$, a Equação 5.10 é reescrita como:

$$\tau_{xy} \cong \tau_{med} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \quad \text{Equação 5.11}$$

A equação acima mostra que a distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção transversal de uma barra retangular é parabólica, Figura 5.7. O valor máximo da tensão de cisalhamento pode ser obtido fazendo-se $y = 0$ na Equação 5.11.

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad \text{Equação 5.12}$$

A relação obtida mostra que o valor máximo da tensão de cisalhamento em uma viga de seção transversal retangular é 50 % maior que o valor V/A que seria obtido considerando-se uma distribuição de tensão uniforme por toda a seção transversal.

5.4 TENSÕES DE CISALHAMENTO EM SEÇÕES DE PAREDES FINAS

Seções com paredes finas normalmente são encontradas em vigas metálicas, como perfis I, tubos e cantoneiras. Esses perfis possuem partes dispostas em diversas direções. Na seção anterior foi derivada a equação para o cálculo da resultante da tensão τ_{xy} , vertical na seção transversal. Nessa, será derivada a equação para a outra componente de tensão da seção transversal, τ_{xz} . Considerando, por exemplo, um segmento de comprimento Δx de uma viga perfil I de mesas largas, Figura 5.8, e seja V a força cortante vertical na seção transversal mostrada.

A força cortante longitudinal ΔH que atua no elemento destacado, e é representativa da componente da tensão de cisalhamento τ_{zx} , pode ser obtida pela equação:

$$\Delta H = \frac{V}{I_z} \bar{y}_e A_e \Delta x \quad \text{Equação 5.13}$$

Dividindo ΔH pela área $\Delta A = t\Delta x$ do corte, obtém-se a tensão de cisalhamento média que atua na face do elemento:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{V}{I_z t} \bar{y}_e A_e \quad \text{Equação 5.14}$$

A mesma equação obtida para a seção retangular. Note que essa tensão média representa uma aproximação da tensão τ_{zx} que ocorre na espessura t da mesa.

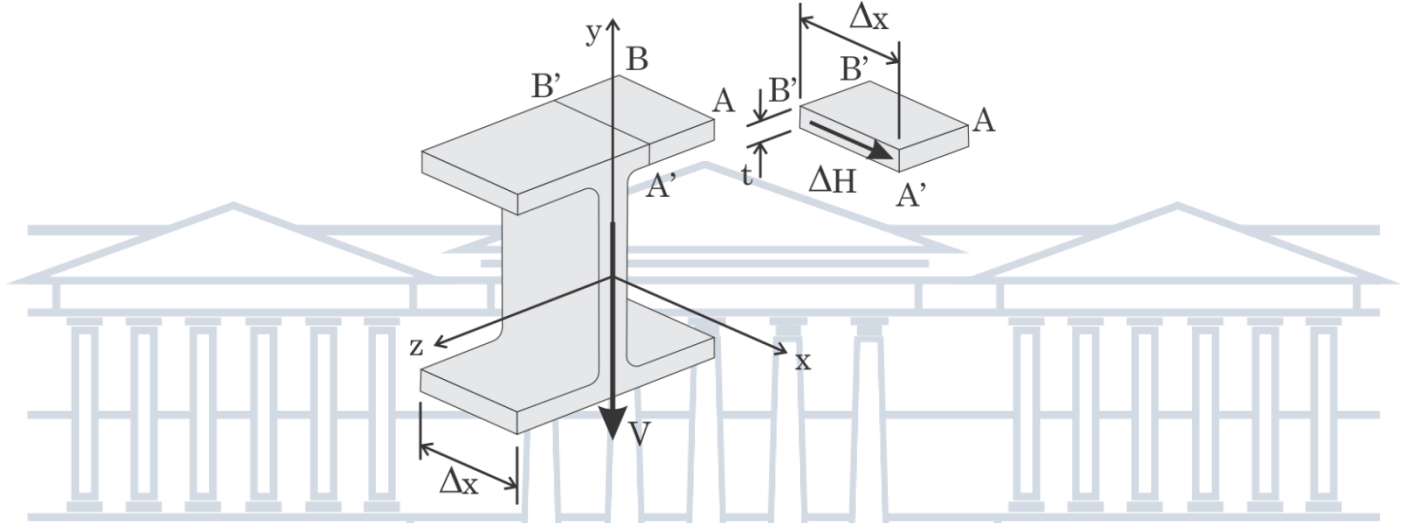


Figura 5.8: Viga perfil I.

De acordo com o teorema de Cauchy, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ conclui-se que a componente horizontal da tensão de cisalhamento, τ_{xz} em qualquer ponto de uma seção transversal de um perfil com paredes finas pode ser obtida com a Equação 5.14, desde que as forças sejam aplicadas em um plano de simetria da seção transversal. Além disso, a seção onde será calculada a tensão de cisalhamento deve ser perpendicular à superfície da peça estrutural, e fornecerá a tensão de cisalhamento da direção tangente a essa superfície (a outra componente pode ser considerada igual a zero devido a pequena espessura t).

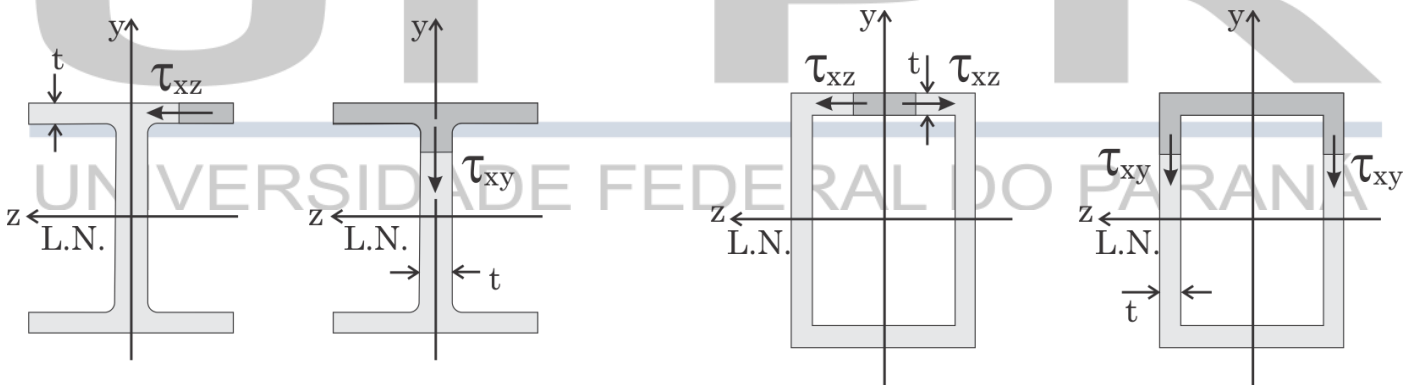


Figura 5.9: Variação das tensões de cisalhamento em perfis de paredes finas.

O fluxo de cisalhamento pode ser obtido pela equação:

$$f = \frac{V}{I_z} \bar{y} A \quad \text{Equação 5.15}$$

Avaliando-se a seção transversal submetida a um esforço cortante V , em um ponto onde a espessura seja t , as

variáveis I_z , t e V são constantes, sendo que a resultante de cisalhamento horizontal é apenas função do momento estático $\bar{y}A$.

Dessas condições, observa-se que nos perfis I a tensão de cisalhamento τ_{xz} varia nas mesas da extremidade para o centro, e a tensão de cisalhamento τ_{xy} varia na alma. Já no caso de seções tubulares retangulares, observa-se que a tensão de cisalhamento τ_{xz} varia do eixo de simetria vertical y para as extremidades nas regiões superior e inferior, e a tensão de cisalhamento τ_{xy} varia em ambos os lados até a linha neutra, Figura 5.9.

Até então, foram deduzidas equações para seções transversais com dois planos de simetria e com a força aplicada em um desses planos de simetria. Quando a seção transversal não possuir plano de simetria, ou possuir apenas um plano de simetria, e está sujeita a uma força que não está contida no plano de simetria, caso exista, observa-se que a barra sofre flexão e torção ao mesmo tempo, exceto quando a força é aplicada em um ponto específico chamado de centro de cisalhamento. Normalmente esse centro de cisalhamento não coincide com o centroide.

5.5 CENTRO DE CISALHAMENTO

5.5.1 SEÇÃO COM UM PLANO DE SIMETRIA

Seja a seção transversal com apenas um plano de simetria mostrada na Figura 5.10. A formulação derivada até então, é válida para carregamentos aplicados no plano de simetria da seção transversal e, portanto, as tensões de cisalhamento da viga com seção e carregamento mostrados na Figura 5.10a podem ser calculadas com a Equação 5.15. No entanto, se a seção for rotacionada 90° , Figura 5.10b, a equação já não pode mais ser aplicada para o cálculo das tensões de cisalhamento, pois com o carregamento aplicado fora do plano de simetria e na direção do centroide da seção transversal, a viga sofreria flexão e torção ao mesmo tempo, conforme mostra a Figura 5.10c, e a distribuição dessas tensões será muito diferente da distribuição definida pela Equação 5.15.

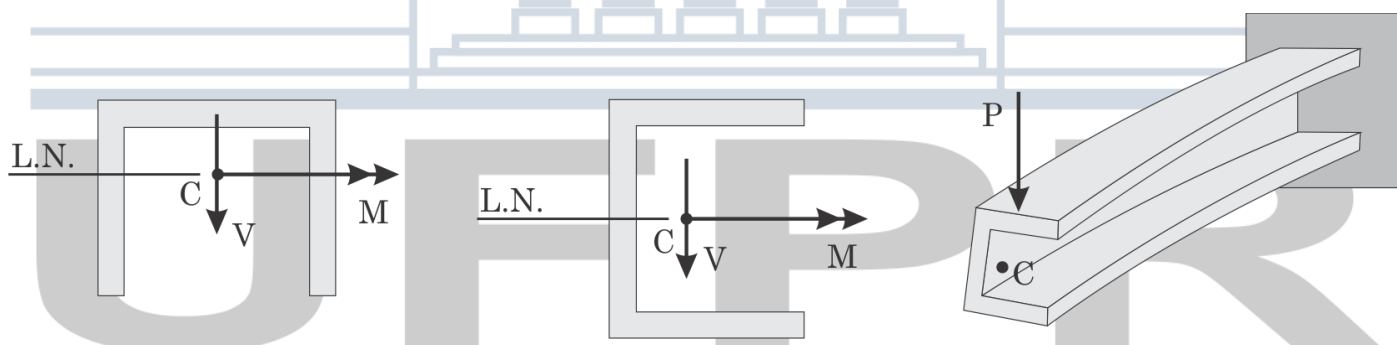


Figura 5.10: Seção transversal U com um plano de simetria com a carga P aplicada nesse plano (a), a carga P aplicada perpendicular a esse plano (b) e a viga flexo-torcida.

A questão que surge é a seguinte: é possível aplicar a força P de tal forma que a viga da Figura 5.10c, com a seção transversal mostrada na Figura 5.10b, sofra flexão sem torção? Caso isso seja possível, a tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção transversal pode ser determinada pela Equação 5.15, e a distribuição das tensões será determinada de acordo com o ilustrado na Figura 5.11.

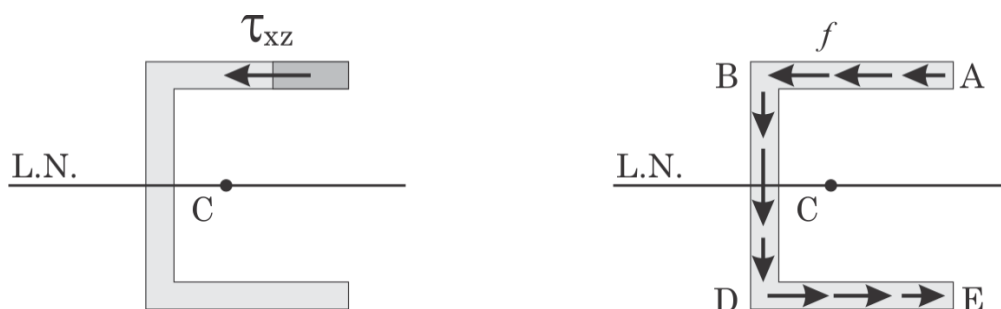


Figura 5.11: Tensões de cisalhamento na seção transversal de uma viga com a carga aplicada perpendicular ao plano de simetria, porém sem sofrer torção (a) e o fluxo de cisalhamento (b).

A força de cisalhamento que atua em um pequeno elemento de área da seção transversal de área $dA = t \, ds$ é $dF = \tau \, dA$, ou $dF = f \, ds$, sendo f o fluxo de cisalhamento no ponto considerado. Portanto, a resultante das forças de cisalhamento que atuam nos elementos da mesa superior do perfil U da Figura 5.11 é uma força horizontal F de intensidade:

$$F = \int_A^B f \, ds \quad \text{Equação 5.16}$$

Como essa seção U possui simetria no plano da linha neutra, a resultante das forças de cisalhamento que atuam na mesa inferior é uma força F' da mesma intensidade de F , porém com sentido oposto. Portanto, a resultante das tensões de cisalhamento na alma deve ser igual ao esforço cortante da seção V :

$$V = \int_B^D f \, ds \quad \text{Equação 5.17}$$

Note que F e F' formam um binário $F \cdot h$, sendo h a distância entre as linhas de centro das mesas. Esse momento pode ser eliminado movendo-se o esforço cortante V em uma direção perpendicular ao seu eixo de atuação, na direção de atuação do momento, no caso de momento anti-horário, para a esquerda por uma distância e , conforme ilustra a Figura 5.12.

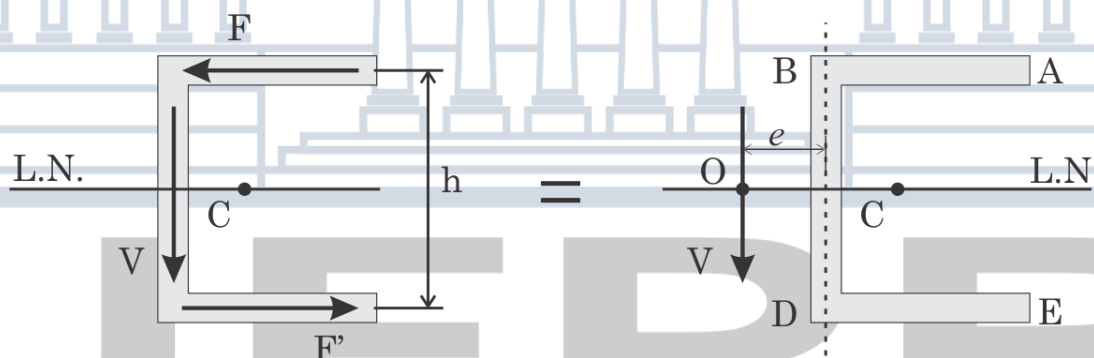


Figura 5.12: Resultante das cortantes na seção transversal e eliminação do binário com um deslocamento e de V .

Essa distância e pode ser escrita com a relação entre esse binário e o esforço cortante V :

$$e = \frac{Fh}{V} \quad \text{Equação 5.18}$$

Portanto, se a carga P aplicada à viga perpendicularmente ao seu plano de simetria for aplicada a uma distância e da linha de centro da alma, a viga sofrerá apenas flexão em um plano vertical sem sofrer torção. O ponto O em que a linha de ação da carga P (e por consequência do esforço cortante V), deslocada de e , intercepta o eixo de simetria é chamado de centro de cisalhamento.

No caso o carregamento P ser inclinado em relação à direção vertical, a barra também estará livre de qualquer torção se a força P for aplicada no centro de cisalhamento da seção, sendo decomposta em P_z e P_y para o cálculo das tensões de cisalhamento.

5.5.2 SEÇÃO SEM NENHUM PLANO DE SIMETRIA

Considerando uma cantoneira submetida a uma força vertical P . Se a barra estiver orientada de tal maneira que a força P seja perpendicular a um dos eixos principais da seção transversal, de mesma direção do eixo z no caso da Figura 5.13, o momento M causado pela deflexão da barra estará direcionado ao longo desse eixo z , e a linha neutra coincidirá com esse eixo. Sendo assim, a Equação 4.15 pode ser aplicada para o cálculo das tensões normais na seção.

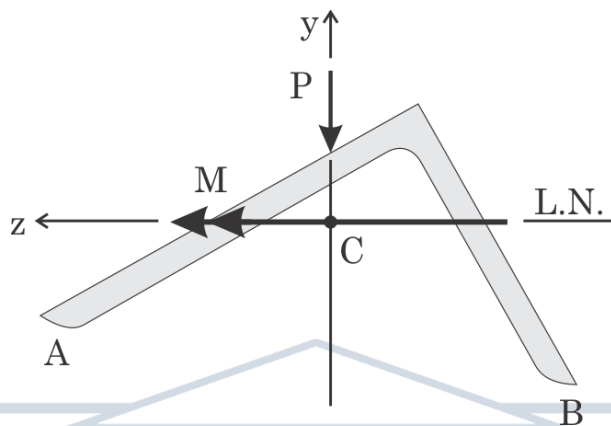


Figura 5.13: Cantoneira orientada com um dos eixos principais orientado na direção do eixo z .

O objetivo agora é determinar onde a força P deverá ser aplicada para que se possa utilizar a Equação 5.15 no cálculo das tensões de cisalhamento da seção, isto é, aplicar a força P de forma que a barra sofra flexão sem sofrer torção.

Como anteriormente, suponha que as tensões de cisalhamento na seção sejam calculadas com a Equação 5.15. As forças de cisalhamento elementares aplicadas na seção podem ser expressas como $dF = f ds$, sendo f o fluxo de cisalhamento. A resultante das forças de cisalhamento que atuam na parte AO da seção transversal é uma força F_1 direcionada ao longo de AO, e a resultante na outra aba, OB é uma força F_2 ao longo de OB, conforme ilustra a Figura 5.14.

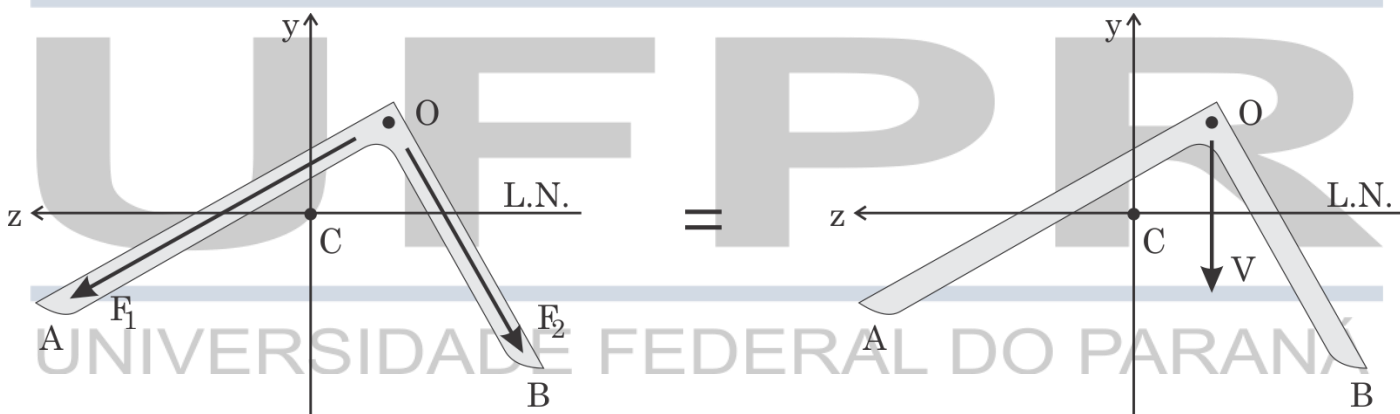


Figura 5.14: Resultantes de cisalhamento na cantoneira e a cortante resultante na seção.

Como F_1 e F_2 passam pelo ponto O, no vértice da cantoneira, conclui-se que o esforço cortante V , também deverá passar pelo ponto O. Portanto, se a linha de ação da força externa aplicada P passar pelo ponto O a barra não sofrerá torção. Como qualquer força P , indiferente da sua direção, aplicada ao ponto O, pode ser decomposta em componentes perpendiculares aos eixos principais, conclui-se que a barra não sofrerá torção se a linha de ação de P , indiferente de sua direção e sentido, passar pelo ponto O, ou seja, o ponto O é o centro de cisalhamento da cantoneira.

Outro perfil encontrado frequentemente na prática é o perfil Z ilustrado na Figura 5.15. Embora a seção transversal de um perfil Z não possua qualquer eixo de simetria, ela possui um centro de simetria O. Isso significa que, para qualquer ponto da seção transversal em z e y positivos, existe um outro ponto em z e y negativos que podem ser unidos por uma reta que passará por O. O centro de simetria O além de coincidir com o

centroide da seção transversal, também coincide com o centro de cisalhamento dessa seção transversal.

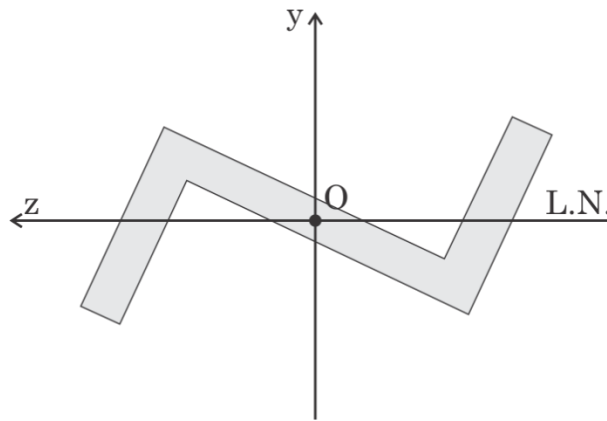


Figura 5.15: Perfil Z e seu centro de cisalhamento O.

5.6 DISTORÇÕES POR EFEITO CORTANTE

O efeito cortante na viga também provoca deformações na seção transversal na forma de um empenamento, como mostrado na Figura 5.16, e a distribuição dessas deformações de cisalhamento não são uniformes ao longo da seção.

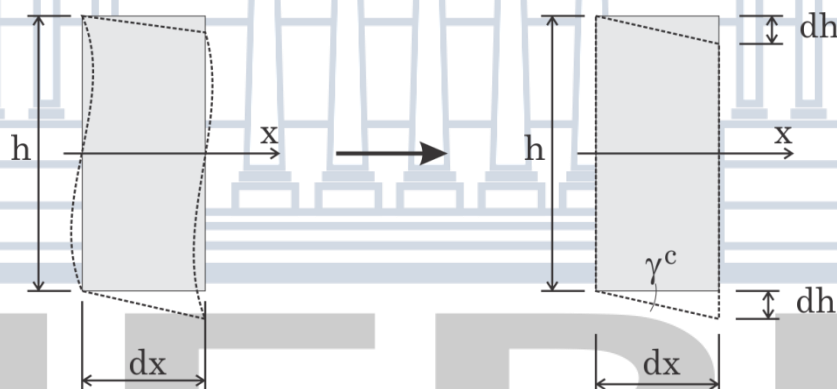


Figura 5.16: Empenamento da seção transversal.

No entanto, pode-se adotar uma aproximação constante para a distorção em um elemento infinitesimal de comprimento da viga. Essa distorção constante pode ser escrita como:

$$\gamma^c = \frac{dh}{dx} = \frac{\tau_{med}}{G} \quad \text{Equação 5.19}$$

Sendo γ^c a distorção de cisalhamento por efeito cortante, dh deslocamento transversal relativo em um elemento infinitesimal de barra e dx um comprimento infinitesimal de viga.

Com o objetivo de simplificar o cálculo dos deslocamentos por cisalhamento, dh, muitos autores adotam um fator κ (kappa) para a correção da tensão média em função da definição clássica de tensão de cisalhamento em barra. Sendo assim, a tensão média pode ser escrita como:

$$\tau_{med} = \kappa \frac{V}{A} \quad \text{Equação 5.20}$$

Na qual V é o esforço cortante na seção transversal e A a sua área. Portanto, de acordo com a definição de tensão média de cisalhamento para a flexão de vigas:

$$\kappa = \frac{A}{I_z t} \bar{y}_e A_e \quad \text{Equação 5.21}$$

Sendo A a área de seção transversal, I_z o momento de inércia em relação ao eixo representativo da superfície neutra na seção transversal, t a espessura da seção transversal onde se está avaliando a tensão de cisalhamento e $\bar{y}_e A_e$ o momento estático. O valor de κ é sempre obtido para a máxima tensão cisalhante da viga.

Portanto, a distorção em um elemento infinitesimal de comprimento da viga é reescrita como:

$$dh = \kappa \frac{V}{GA} dx \quad \text{Equação 5.22}$$

Que pode ser integrado no comprimento da viga para se calcular o deslocamento total por esforço cortante.

Entretanto, para vigas com comprimento muito maior do que a altura da seção transversal, os deslocamentos provocados por efeitos cortantes são desprezadas na presença dos deslocamentos provocadas por efeitos de flexão.

5.7 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO

Uma expressão da energia de deformação semelhante à da tensão normal também pode ser estabelecida para o material quando ele é submetido à tensão de cisalhamento. Considere o elemento de volume mostrado na Figura 5.17.

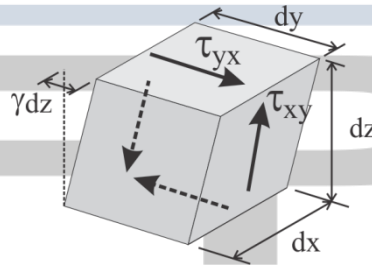


Figura 5.17: Deformação por cisalhamento de um elemento infinitesimal.

Nesse caso, a tensão de cisalhamento provoca a deformação do elemento de tal modo que somente a força de cisalhamento $dF = \tau dx dy$ que age sobre a face superior do elemento, desloca-se γdz em relação à face inferior. As faces verticais só giram, portanto, as forças de cisalhamento nessas faces não realizam nenhum trabalho. Por consequência, a energia de deformação armazenada no elemento é:

$$dU_i = \frac{1}{2} \tau dx dy \gamma dz \quad \text{Equação 5.23}$$

ou

$$dU_i = \frac{1}{2} \tau \gamma dV \quad \text{Equação 5.24}$$

Onde $dV = dx dy dz$ é o volume do elemento.

Integrando sobre todo o volume do corpo para obter sua energia de deformação acumulada, chega-se a:

$$U_i = \int_V \frac{\tau \gamma}{2} dV \quad \text{Equação 5.25}$$

Como no caso da tensão normal, a energia de deformação por cisalhamento é sempre positiva, uma vez que τ e γ estão sempre na mesma direção. Se o material é homogêneo e está no regime elástico linear, então, aplicando a lei de hooke, $\gamma = \tau/G$, pode-se expressar a energia de deformação em termos da tensão de cisalhamento.

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad \text{Equação 5.26}$$

Supondo uma viga com um eixo de simetria em torno do eixo y, conforme ilustra a Figura 5.1.

Se a resultante do cisalhamento interno na seção é V, a tensão de cisalhamento que atua sobre o elemento de volume do material, com comprimento dx e área dA, é dada pela Equação 5.20. Substituindo essa equação na Equação 5.26, a energia de deformação por cisalhamento torna-se:

$$U_i = \int_V \frac{1}{2G} \left(\frac{V}{I_z t} \bar{y}_e A_e \right)^2 dV = \int_0^L \frac{V^2}{2G I_z^2} \left[\int_A \frac{(\bar{y}_e A_e)^2}{t^2} dA \right] dx \quad \text{Equação 5.27}$$

A integral entre colchetes é calculada na área de seção transversal da viga e, para simplificar o cálculo é definido o fator de forma χ .

$$\chi = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{(\bar{y}_e A_e)^2}{t^2} dA \quad \text{Equação 5.28}$$

Que substituído na equação anterior leva a:

$$U_i = \int_0^L \frac{\chi V^2}{2GA} dx \quad \text{Equação 5.29}$$

Esse fator de forma χ é um numero adimensional único para cada área de seção transversal específica. Por exemplo, se a viga tiver seção retangular (Figura 5.7) de largura b e altura h, então, $t = b$, $A = b.h$, $I_z = bh^3/12$, e:

$$\bar{y}_e A_e = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{Equação 5.30}$$

Substituindo na Equação 5.28:

$$\chi = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left(\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right)^2}{b^2} b \, dy = \frac{6}{5}$$

Equação 5.31

O fator de forma χ para outras seções é determinado de maneira similar. Uma vez obtido, esse valor é substituído na Equação 5.29 e a energia de deformação por cisalhamento transversal é então calculada.

