6 TORÇÃO SIMPLES

Torção simples ocorre quando a resultante na seção for um binário cujo plano de ação é o da própria seção. Considerando a barra de seção circular AB submetida em A e B a toques iguais e opostos T e T′, cortada em por um plano perpendicular em algum ponto arbitrário C, conforme

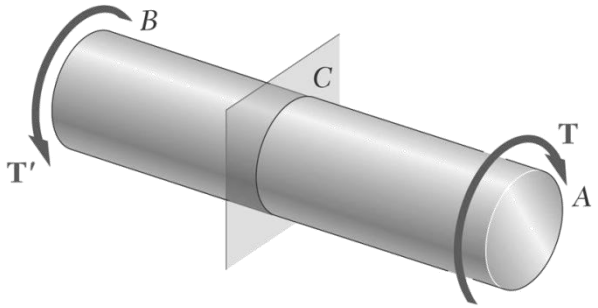


Figura 6.1: Barra circular submetida a torção.

O diagrama de corpo livre da parte BC da barra deve incluir as forças de cisalhamento elementares dF, perpendiculares ao raio da barra, que a parte AC aplica em BC quando a barra é torcida, conforme

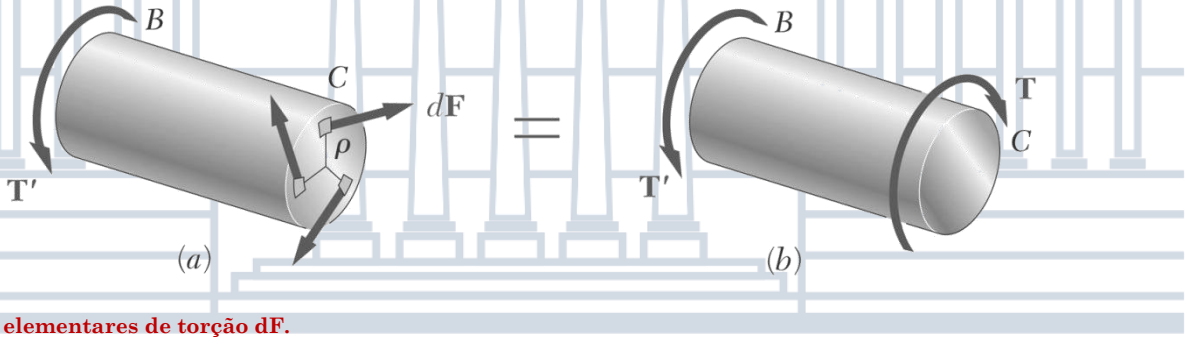


Figura 6.2: Ações elementares de torção dF.

As condições de equilíbrio para BC requerem que o sistema dessas forças elementares seja equivalente a um torque interno T, igual e oposto a T′. Chamando de ρ a distância perpendicular da força dF ao eixo da barra, ou centro de torção, ponto onde as tensões de cisalhamento da torção são iguais a zero, e supondo que a soma dos momentos das forças de cisalhamento dF em relação ao eixo da barra seja igual em intensidade ao torque T, pode-se escrever:

$$\int \rho dF = T \qquad \text{Equação 6.1}$$

Ou, uma vez que dF = τ dA, com τ sendo a tensão de cisalhamento do elementos de área dA,

$$\int \rho \tau dA = T \qquad \text{Equação 6.2}$$

Embora a relação obtida expresse uma importante condição que deve ser satisfeita pelas tensões de cisalhamento em qualquer seção transversal, ela não nos informa como essas tensões são distribuídas na seção transversal.

Sabe-se que o torque aplicado à barra produz tensões de cisalhamento τ nas faces perpendiculares ao eixo longitudinal da barra. Entretanto, as condições de equilíbrio requerem a existência de tensões iguais nas faces formadas pelos dois planos que contêm o eixo da barra. Uma visualização de que essas tensões realmente ocorrem na torção pode ser feita através da consideração de uma barra formada por tiras separadas e fixadas por

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

meio de pinos a discos colocados em suas extremidades, conforme ilustra a Figura 6.3.

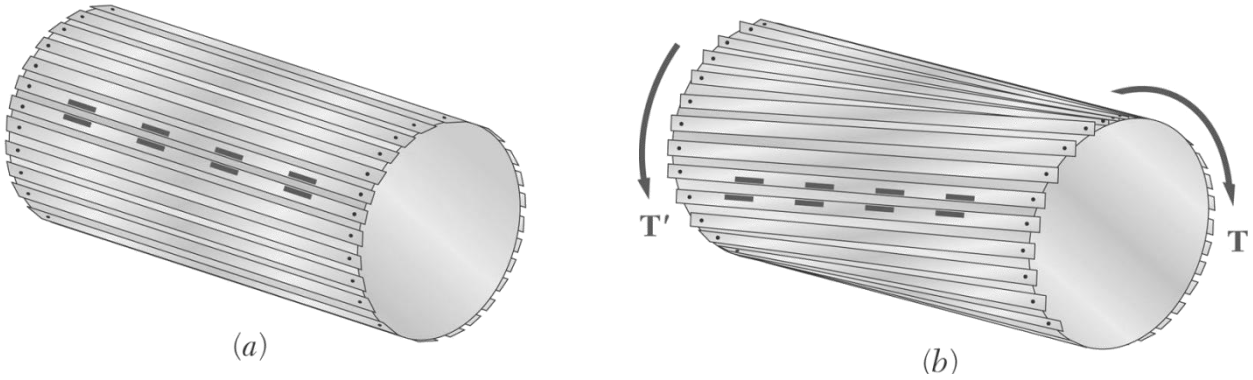


Figura 6.3: Barra torcida formada por tiras fixadas nas extremidades.

Se forem pintadas marcas em duas tiras adjacentes, observa-se que as tiras deslizam uma em relação a outra, quando são aplicados torques iguais e opostos nas extremidades. Embora esse deslizamento não ocorra realmente em uma barra de material coesivo e homogêneo, a tendência ao deslizamento existirá, mostrando assim que ocorrem tensões em planos longitudinais bem como em planos perpendiculares ao eixo da barra.

6.1 DEFORMAÇÕES POR TORÇÃO EM UMA BARRA DE SEÇÃO CIRCULAR

Considere uma barra de seção circular conectada a um suporte rígido em uma de suas extremidades, conforme ilustra a Figura 6.4.

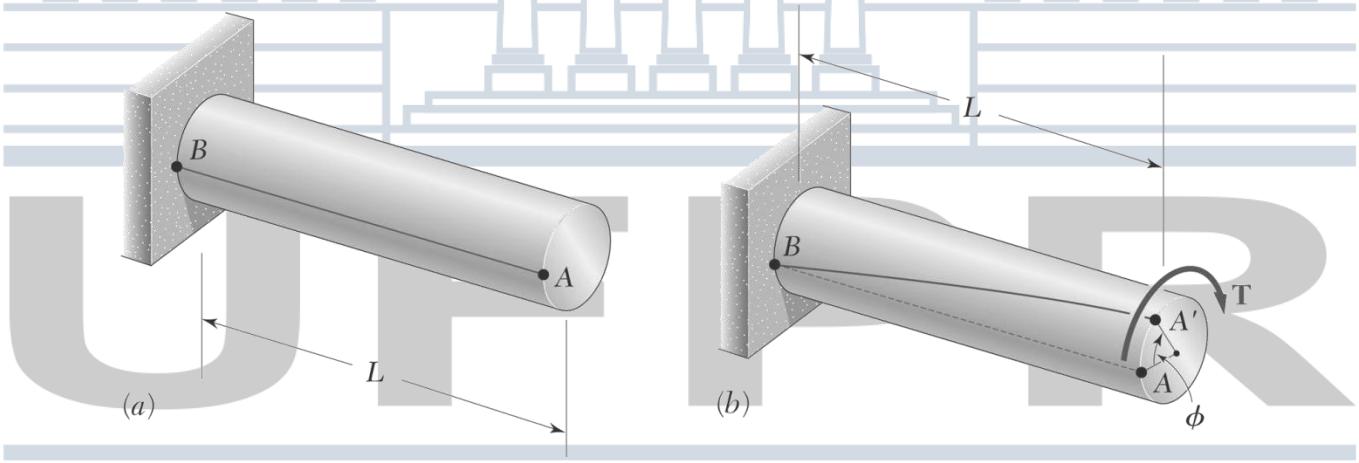


Figura 6.4: Barra circular em balanço torcida.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Se um torque T é aplicado à extremidade livre, a barra sofrerá rotação em torno do seu eixo central, com a extremidade livre girando de um ângulo ϕ chamado de ângulo de torção. Dentro de determinados valores de T, o ângulo ϕ é proporcional ao T e ao comprimento L da barra.

Uma importante propriedade de uma barra circular de seção cheia quando submetida a torção é que toda a seção permanece plana e indeformada. Embora várias seções transversais ao longo da barra sofram rotações de diferentes valores, cada seção transversal gira como um disco rígido (Figura 6.5a). Isso não é valido para seções circulares vazadas ou prismáticas. Quando uma barra de seção não circular é submetida a torção, suas várias seções transversais empenam e não permanecem planas (Figura 6.5b).

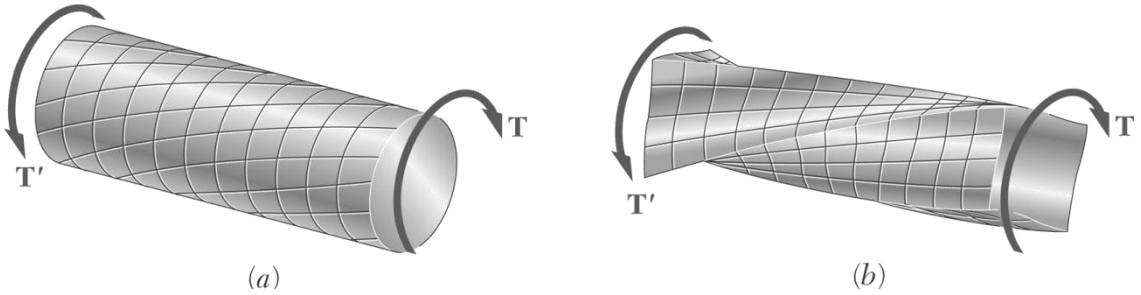


Figura 6.5: Seção circular e não circular torcida.

As deduções apresentadas nesse capítulo são fundamentadas na hipótese de barras com extremidades rígidas.

A determinação das deformações de cisalhamento em uma barra circular de comprimento L e raio c, que foi torcida de um ângulo ϕ (Figura 6.6a), será feita destacando-se da barra um cilindro de raio ρ e considerando-se um pequeno elemento quadrado formado por dois círculos adjacentes e duas linhas retas adjacentes traçadas antes da aplicação de qualquer torque, conforme Figura 6.6b. Quando a barra é torcida, o elemento assume o formato de um losango (Figura 6.6c).

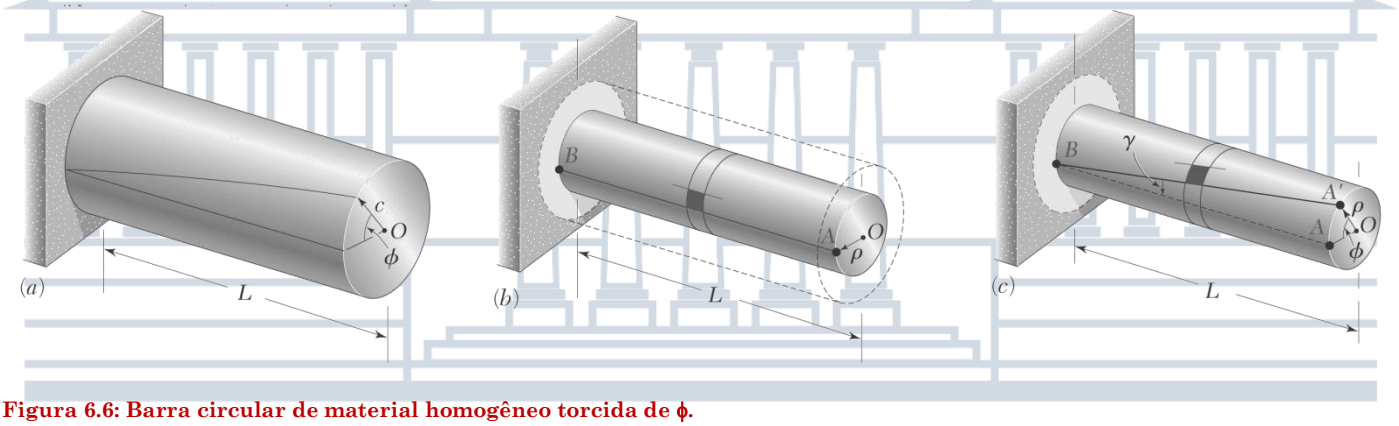


Figura 6.6: Barra circular de material homogêneo torcida de ϕ.

Como a deformação por cisalhamento γ em um elemento é medida pela variação dos ângulos formados pelos lados daquele elemento e, como os círculos que definem dois dos lados do elemento considerado aqui permanecem inalterados, a deformação de cisalhamento γ deve ser igual ao ângulo entre as linhas AB e A´B´ (com γ expresso em radianos). Das hipóteses simplificadoras, ou seja, para pequenos valores de γ, pode-se expressar o comprimento do arco AA´ como AA´ = Lγ. Da seção transversal da extremidade tem-se ainda que AA´ = ρϕ, portanto:

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$ Equação 6.3

Sendo ϕ e γ expressos em radianos. A equação nos diz que a deformação por cisalhamento na extremidade de uma barra circular varia linearmente com a distância do eixo da barra. Portanto, a deformação de cisalhamento máxima é obtida quando ρ = c.

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$$ Equação 6.4

Eliminando ϕ na Equação 6.3, pode-se expressar a deformação de cisalhamento em função da deformação máxima de cisalhamento.

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$ Equação 6.5

6.2 TENSÕES POR TORÇÃO EM BARRAS CIRCULARES

Considerando o material homogêneo e trabalhando em seu regime elástico linear, a relação entre tensão e deformação de cisalhamento pode ser escrita em função do módulo de elasticidade transversal G.

$$\tau = G\gamma$$ Equação 6.6

Substituindo-se a Equação 6.6 em ambos os lados da Equação 6.5, chega-se a:

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max}$$ Equação 6.7

A equação mostra que a tensão de cisalhamento na barra circular varia linearmente com a distância ρ do eixo da barra, conforme mostra a Figura 6.7a para seções cheias e Figura 6.7b para seções anelares.

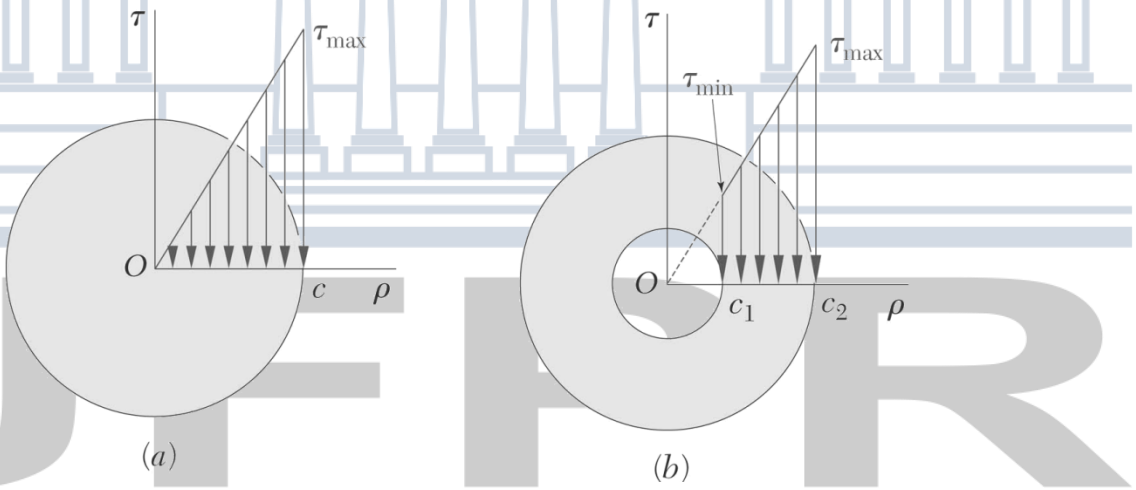


Figura 6.7: Tensões de cisalhamento em barras circulares.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

No caso da seção anelar, verifica-se que:

$$\tau_{min} = \frac{c_1}{c_2}\tau_{max}$$ Equação 6.8

Lembrando-se que a soma dos momentos das forças elementares aplicadas em qualquer seção transversal da barra circular deve ser igual à intensidade T do torque, substituindo a Equação 6.7 na Equação 6.2:

$$T = \int \rho\tau \, dA = \frac{\tau_{max}}{c}\int \rho^2 \, dA$$ Equação 6.9

A integral no último membro representa o momento polar de inércia J[3] com relação ao seu centro, portanto:

$$T = \frac{\tau_{max} J}{c}$$ Equação 6.10

Ou, resolvendo para τ_{max}:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$ Equação 6.11

Ou ainda, para uma distância ρ qualquer do eixo da barra, a tensão é calculada como:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$ Equação 6.12

6.3 ÂNGULO DE TORÇÃO EM BARRAS CIRCULARES

Sendo a barra em balanço da Figura 6.8, de comprimento L e seção transversal cheia de raio c, solicitada por um momento torçor T em sua extremidade livre.

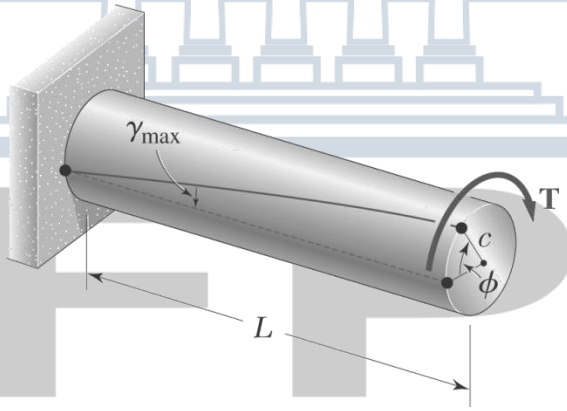


Figura 6.8: Barra em balanço solicitada por um torque T.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Sabendo que:

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$ Equação 6.13

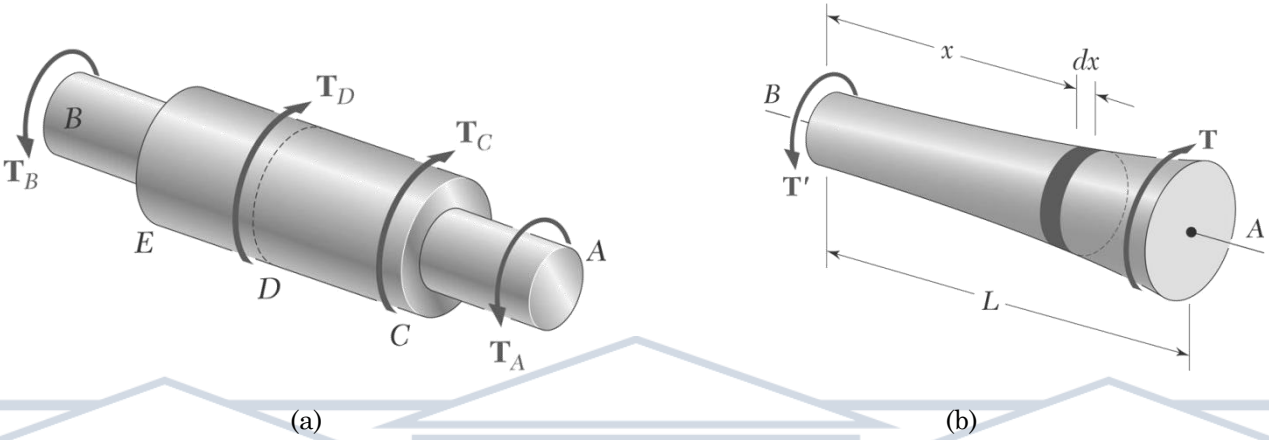
Igualando o segundo e o quarto termos da equação, o ângulo de torção é escrito como:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$ Equação 6.14

[3] O momento polar de inércia de um círculo de raio c é $J = {}^1/_2\,\pi c^4$, e de uma seção anelar, $J = {}^1/_2\,\pi(c_2{}^4 - c_1{}^4)$.

Sendo ϕ expresso em radianos. A relação obtida mostra que o ângulo de torção é proporcional ao momento torçor T aplicado na barra.

No caso da barra AB mostrada na Figura 6.9a devem ser consideradas quatro partes diferentes: AC, CD, DE e EB.



(a) (b)

Figura 6.9: Barra com diferentes diâmetros (a) e com seção variável (b).

O ângulo de torção total da barra , ou seja, o ângulo em que a extremidade A gira em relação a extremidade B, é obtido com a soma dos ângulos de torção de cada parte.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$ Equação 6.15

Sendo T_i, L_i, J_i e G_i o momento torçor, o comprimento o momento polar de inércia e o módulo de elasticidade transversal de cada parte.

No caso de uma barra com seção variável, Figura 6.9b, a Equação 6.14 pode ser aplicada a um disco de espessura dx. O ângulo de torção da barra é, portanto:

$$\phi = \int_0^L \frac{T}{J(x)G} dx$$ Equação 6.16

Na qual o momento polar de inércia é uma função de x, J(x).

6.4 ELEMENTOS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS

Uma barra ou tubo circular submetido a um torque pode ser classificado como estaticamente indeterminado, quando a equação do momento na condição de equilíbrio aplicada em torno de sua linha neutra, não for o suficiente para determinar os torques desconhecidos que sobre ele atuam. A Figura 6.10 ilustra essa situação, sendo a barra metade maciça e metade tubular. Como pode-se observar no diagrama de corpo livre, os torques de reação de apoio T_A e T_B são desconhecidos, e é requerido que:

$$T_A + T_B = 120$$ Equação 6.17

Como apenas uma equação de equilíbrio é aplicável e há duas incógnitas, o problema é estaticamente

indeterminado.

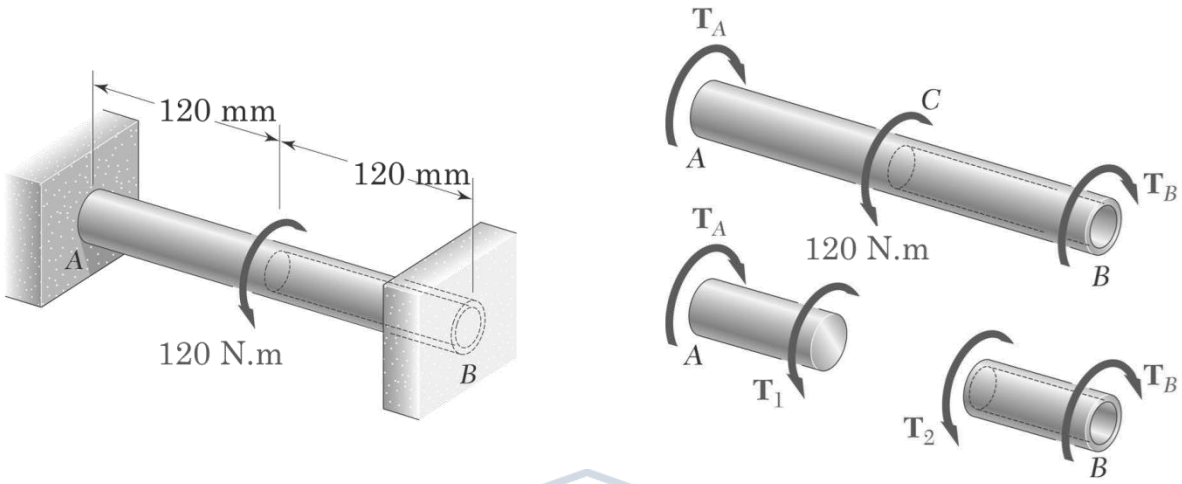


Figura 6.10: Barra estaticamente indeterminada submetida a um torque.

A condição de compatibilidade necessária requer que o ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra seja nulo, portanto:

$$\phi_{A/B} = \phi_{A/C} + \phi_{C/B} = 0 \qquad \text{Equação 6.18}$$

Utilizando a Equação 6.14 e entendendo que o torque interno no segmento AC, $T_1 = T_A$ é positivo, e no segmento CB, $T_2 = T_B$ é negativo, a equação de compatibilidade é reescrita como:

$$\frac{T_A L_{A/C}}{J_{A/C} G} - \frac{T_B L_{C/B}}{J_{C/B} G} = 0 \qquad \text{Equação 6.19}$$

Resolvendo para o torque T_B:

$$T_B = \frac{L_{A/C}}{L_{C/B}} \frac{J_{C/B}}{J_{A/C}} T_A \qquad \text{Equação 6.20}$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

E para T_A:

$$T_A = \frac{L_{C/B}}{L_{A/C}} \frac{J_{A/C}}{J_{C/B}} T_B \qquad \text{Equação 6.21}$$

6.5 TORÇÃO EM ELEMENTOS DE SEÇÃO NÃO CIRCULAR

As fórmulas obtidas para as distribuições de deformação e tensão sob um torque aplicam-se somente a elementos com uma seção transversal circular. As deduções foram fundamentadas na hipótese de que a seção transversal do elemento permanecia plana e indeformável; e a validade dessa hipótese depende da axissimetria do elemento, isto é, depende do fato de que sua aparência permaneça a mesma quando ele é visto de uma posição fixa e girado sobre seu eixo por um ângulo arbitrário.

Uma barra quadrada mantém a mesma aparência somente quando é girada em 90° ou 180°. Seguindo a mesma linha de raciocínio, pode-se mostrar que as diagonais da seção transversal quadrada da barra e as linhas que unem os pontos médios dos lados daquela seção permanecem retas, conforme ilustra a Figura 6.11.

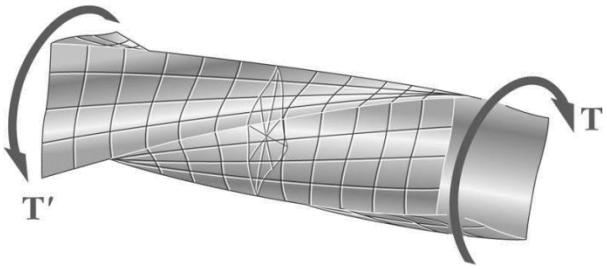
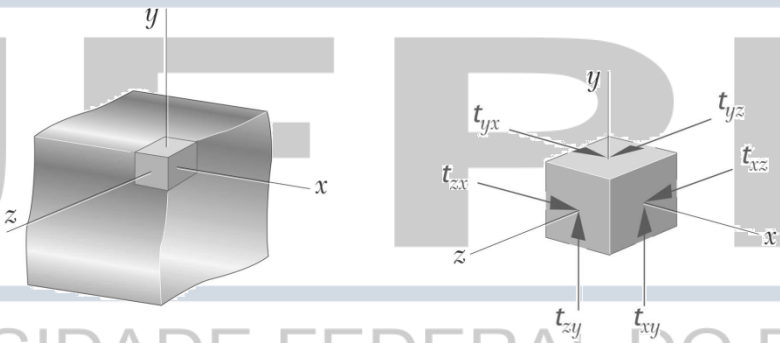


Figura 6.11: Barra prismática torcida.

No entanto, por causa da falta de axissimetria da barra, qualquer outra linha traçada em sua seção transversal se deformará quando a barra for girada, e a própria seção transversal empenará ficando fora de seu plano original.

Portanto, as equações que definem, respectivamente, as distribuições de deformação e tensão elásticas em um eixo de seção circular, não podem ser utilizadas para elementos de seção não circulares. Por exemplo, seria errado supor que a tensão de cisalhamento na seção transversal de uma barra quadrada varie linearmente com a distância a partir do centro da barra e seja, portanto, maior nos cantos da seção transversal. Como será visto a tensão de cisalhamento na realidade é zero nesses pontos.

Considere um pequeno elemento cúbico localizado em um dos cantos da seção transversal de uma barra quadrada submetida a um torque com eixos coordenados paralelos às arestas do elemento, conforme ilustra a Figura 6.12. Como a face do elemento perpendicular ao eixo y é parte da superfície livre da barra, todas as tensões nessa face devem ser zero, ou seja, $\tau_{yx} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$ e $\tau_{zy} = 0$. Portanto, para manter o equilíbrio do elemento chega-se a conclusão de que $\tau_{xy} = 0$ e $\tau_{xz} = 0$.



UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Figura 6.12: Elemento cúbico obtido em um dos cantos de uma barra prismática submetida a torção.

Assim, ambas as componentes da tensão de cisalhamento na face do elemento perpendicular ao centro da barra são iguais à zero. Portanto, não há tensão de cisalhamento nos cantos da seção transversal da barra.

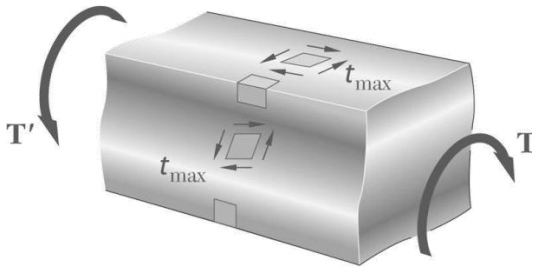


Figura 6.13: Tensões máximas em uma barra prismática torcida.

Ao se torcer um modelo de borracha de uma barra de seção transversal quadrada, pode-se verificar facilmente que não há deformações e, portanto, não há tensões que ocorrem ao longo das arestas da barra, enquanto as maiores deformações, ou seja, as maiores tensões ocorrem ao longo do centro de cada uma das faces da barra, conforme mostra a Figura 6.13.

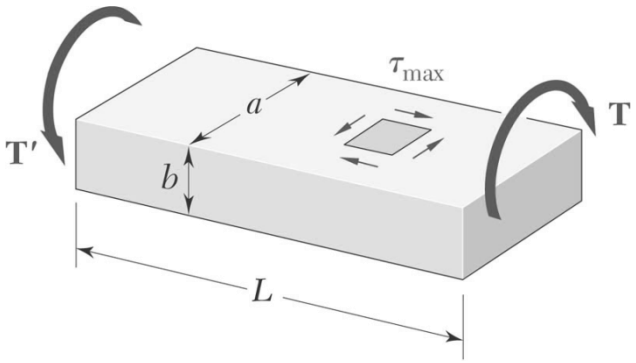


Figura 6.14: Definição dos parâmetros a, b, T e L para cálculo da tensão máxima e ângulo de torção em barras prismáticas.

A determinação das tensões em barras de seção transversal não circular submetidas a um torque está além do escopo deste texto. No entanto, os resultados obtidos da teoria da elasticidade para barras retas com uma seção transversal retangular uniforme serão indicados. Chamando de L o comprimento da barra, por a e b, respectivamente, o lado maior e o lado menor de sua seção transversal, e por T a intensidade dos torques aplicados à barra, conforme Figura 6.14, vemos que a tensão de cisalhamento máxima ocorre ao longo da linha de centro da face maior da barra e é igual a:

$$\tau_{max} = \frac{T}{c_1 ab^2}$$ Equação 6.22

O ângulo de torção, portanto, pode ser expresso como:

$$\phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G}$$ Equação 6.23

Os coeficientes c_1 e c_2 dependem somente da relação a/b e são dados na. Note que as essas equações são válidas somente dentro do intervalo elástico."

a/b	c1	c2	a/b	c1	c2
1,0	0,208	0,1406	3,0	0,267	0,263
1,2	0,219	0,1661	4,0	0,282	0,281
1,5	0,231	0,1958	5,0	0,291	0,291
2,0	0,246	0,229	10,0	0,312	0,312
2,5	0,258	0,249	∞	0,333	0,333

Tabela 6.1: Coeficientes para barras retangulares em torção.

6.6 TORÇÃO EM ELEMENTOS DE PAREDES FINAS ABERTAS

A distribuição de tensões de cisalhamento em um elemento não circular pode ser visualizada mais facilmente utilizando-se a analogia com uma membrana. Uma membrana elástica e homogênea presa a uma moldura rígida e submetida a uma pressão uniforme em um dos seus lados constitui um problema análogo ao de uma barra submetida a um torque, isto é, a determinação da deformação da membrana depende da solução da mesma equação diferencial parcial da determinação das tensões de cisalhamento na barra. Mais especificamente, se Q é

um ponto da seção transversal da barra e Q' o ponto correspondente da membrana, conforme a Figura 6.15, a tensão de cisalhamento τ em Q terá a mesma direção da tangente horizontal à membrana em Q', e sua intensidade será proporcional à inclinação máxima da membrana em Q'. Além disso, o torque aplicado será proporcional ao volume entre a membrana e o plano da moldura rígida. No caso da membrana da Figura 6.15, que está presa a uma moldura retangular, a curva mais inclinada ocorre no ponto médio N' do lado maior da moldura. Assim, verificamos que a tensão de cisalhamento máxima em uma barra de seção transversal retangular ocorrerá no ponto médio N do lado maior daquela seção.

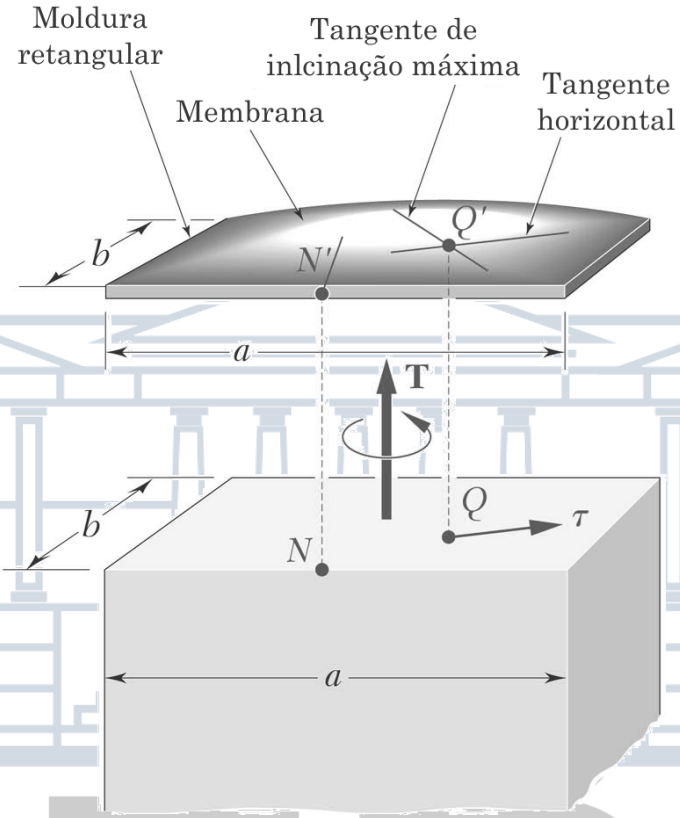


Figura 6.15: Esquema da membrana para a determinação das tensões cisalhantes da torção.

A analogia com uma membrana pode ser utilizada com a mesma eficiência para visualizar as tensões de cisalhamento em qualquer barra reta de seção transversal não circular, uniforme. Particularmente, pode ser utilizada também em elementos de paredes finas com seções transversais mostradas na Figura 6.16, que estão submetidas ao mesmo torque. Utilizando a analogia nota-se que, como o mesmo torque é aplicado a cada elemento, o mesmo volume estará localizado sob cada membrana, e a inclinação máxima será a mesma em cada caso. Assim, para um elemento de paredes finas de espessura uniforme e de forma arbitrária, a tensão de cisalhamento máxima é a mesma que para uma barra retangular com um valor muito grande de a/b, e pode ser determinada pela Equação 6.22 com c1 = 0,333.

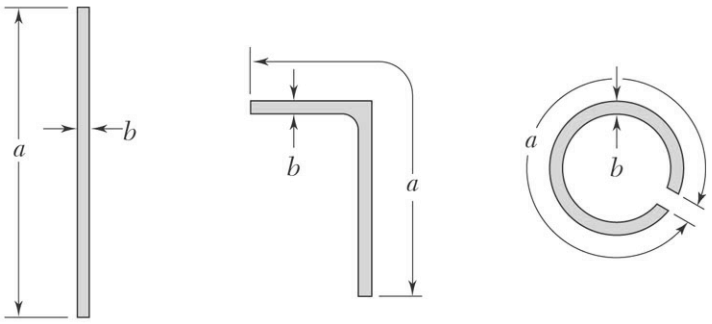


Figura 6.16: Dimensões a e b de barras com paredes finas.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

6.7 TORÇÃO EM ELEMENTOS VAZADOS DE PAREDES FINAS

Considere um elemento vazado cilíndrico de seção não circular submetido a um torque, conforme Figura 6.17. Embora a espessura t da parede possa variar ao longo da seção transversal, será considerado que permanece pequena comparada com as outras dimensões do componente. Agora, destacamos do componente uma parte da parede AB limitada por dois planos transversais por uma distância Δx uma da outra, e por dois planos longitudinais perpendiculares à parede. Como a parte AB está em equilíbrio, a soma das forças que atuam sobre ela na direção longitudinal x deve ser zero. Contudo, as únicas forças envolvidas são as forças de cisalhamento FA e FB que atuam nas extremidades da parte AB. Portanto:

$$F_A - F_B = 0 \qquad \text{Equação 6.24}$$

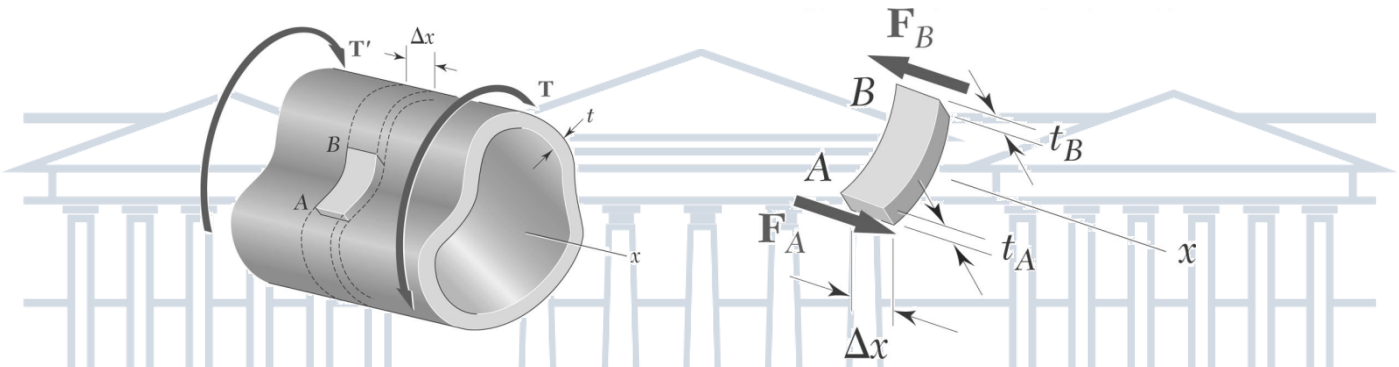


Figura 6.17: Barra vazada cilíndrica de seção não circular submetida a um torque.

A força F_A pode ser expressa como o produto da tensão de cisalhamento longitudinal, τ_A, na pequena face em A, pela área $t_A\Delta x$ daquela face:

$$F_A = \tau_A(t_A\Delta x) \qquad \text{Equação 6.25}$$

Embora a tensão de cisalhamento seja independente da coordenada x do ponto considerado, ela pode variar através da parede; assim, t_A representa o valor médio da tensão calculado através da parede. Expressando F_B de maneira similar e substituindo F_A e F_B na Equação 6.24:

$$\tau_A(t_A\Delta x) - \tau_B(t_B\Delta x) \qquad \text{Equação 6.26}$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Ou,

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = \tau t = f \qquad \text{Equação 6.27}$$

Como A e B foram escolhidos arbitrariamente, a equação expressa que o produto τ.t da tensão de cisalhamento longitudinal τ e da espessura t da parede é constante através do elemento, e seu valor é conhecido como fluxo de cisalhamento na parede da barra de seção vazada.

Destacando um pequeno elemento da parte AB da parede, conforme Figura 6.18. Como as faces superior e inferior desse elemento são partes da superfície livre do componente vazado, as tensões nessas faces são iguais à zero. As componentes de tensão indicadas nas outras faces por setas tracejadas também são zero, enquanto que, aquelas representadas por setas solidas, são iguais. Assim, a tensão de cisalhamento em qualquer ponto de uma seção transversal de um componente vazado é paralela à parede da superfície e seu valor médio calculado através

da parede satisfaz a condição τ.t = cte = *f*.

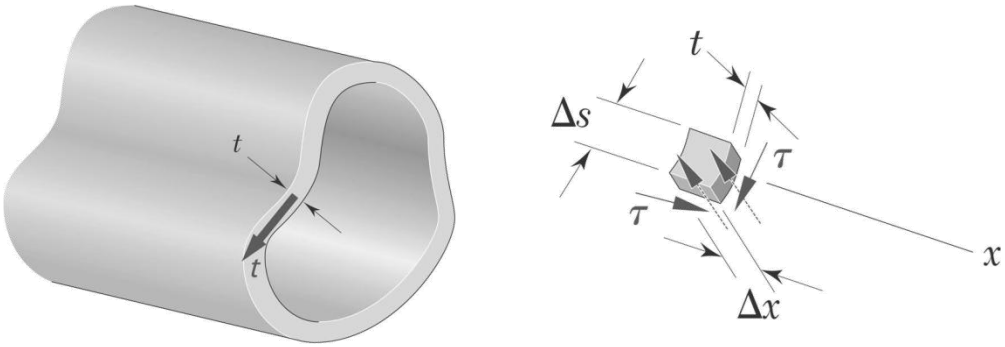


Figura 6.18: Seção transversal do elemento vazado não circular.

Considerando um pequeno elemento da seção da parede, de comprimento ds, conforme Figura 6.19a. A área do elemento é dA = t ds, e a intensidade da força de cisalhamento dF que atua no elemento é:

$$dF = \tau dA = \tau(tds) = (\tau t)ds = f ds \qquad \text{Equação 6.28}$$

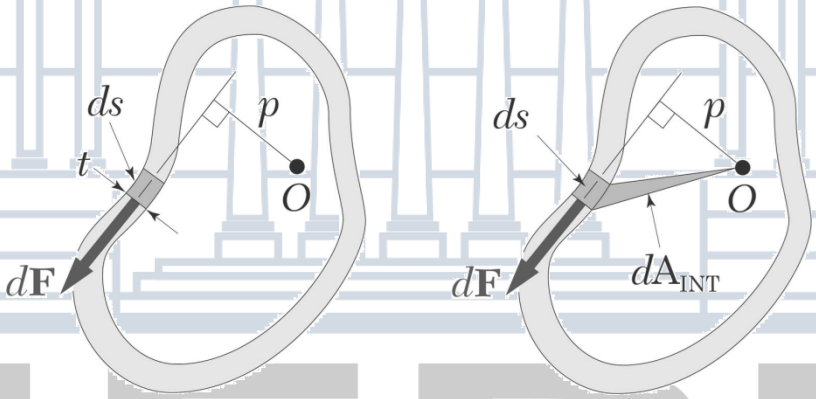


Figura 6.19: Localização de um elemento da seção da parede de uma barra vazada não circular (a), .

Um momento dM_0 dessa força em relação a um ponto arbitrário O dentro da cavidade do elemento pode ser obtido multiplicando-se dF pela distância perpendicular p do ponto O até à linha de ação de dF.

$$dM_0 = pdF = p(f ds) = f(pds) \qquad \text{Equação 6.29}$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Contudo, o produto p ds é igual a duas vezes a área dA_{INT} do triângulo de ds a O na Figura 6.19b. Portanto:

$$dM_0 = f(2dA_{INT}) \qquad \text{Equação 6.30}$$

Como a integral através da seção da parede do membro esquerdo da Equação 6.30 representa a soma dos momentos de todas as forças de cisalhamento elementares que atuam sobre a seção da parede, e como essa soma é igual ao torque T aplicado ao componente vazado:

$$T = \oint dM_0 = \oint f(2dA_{INT}) \qquad \text{Equação 6.31}$$

Sendo constante o fluxo de cisalhamento *f*:

$$T = 2fA_{INT}$$ Equação 6.32

em que A_{INT} é a área limitada pela linha de centro da parede através da seção, conforme ilustra a Figura 6.20.

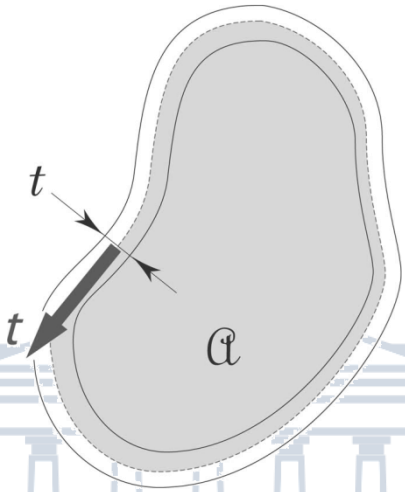


Figura 6.20: Definição da área interna da seção transversal da barra vazada não circular.

A tensão de cisalhamento em qualquer ponto da parede pode ser expressa em termos do torque T, substituindo-se *f* da Equação 6.25 na Equação 6.32 e resolver para τ.

$$\tau = \frac{T}{2tA_{INT}}$$ Equação 6.33

em que t é a espessura da parede no ponto considerado e A_{INT} a área limitada pela linha de centro. Lembramos que τ representa o valor médio da tensão de cisalhamento através da parede. No entanto, para deformações elásticas, a distribuição de tensões de um lado a outro da parede pode ser considerada uniforme, e a Equação 6.33 dará o valor real da tensão de cisalhamento em um determinado ponto.

O ângulo de torção de uma barra de seção vazada de parede fina pode ser obtido utilizando-se um método da energia. Supondo uma deformação elástica, a densidade de energia de deformação pode ser escrita como:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

$$u = \frac{\tau^2}{2G}$$ Equação 6.34

E, portanto, a energia de deformação é:

$$U = \int_0^L \oint ut\, ds\, dx$$ Equação 6.35

O trabalho de um torque é definido como:

$$W = \frac{1}{2} T\phi$$ Equação 6.36

Substituindo a Equação 6.33 na Equação 6.34 e o resultando na Equação 6.35, e igualando ao trabalho do torque, Equação 6.36, sendo que para se ter equilíbrio, a energia de deformação é igual ao trabalho realizado pelo torque, chega-se a:

$$\phi = \frac{TL}{4{A_{INT}}^2 G} \oint \frac{1}{t} ds$$ Equação 6.37

em que a integral é calculada ao longo da linha de centro da seção da parede.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ