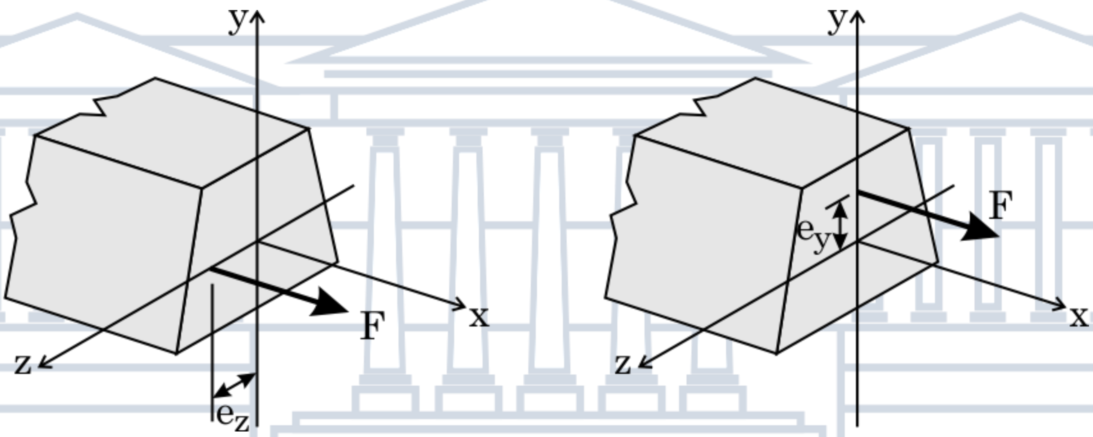
7 FLEXÃO COMPOSTA

Ocorre o esforço de flexão composta quando a resultante das tensões normais pode ser decomposta em uma força normal e momentos fletores. Quando o plano do momento fletor intercepta a seção segundo um dos eixos principais de inércia, o esforço é denominado de flexão composta normal, caso contrário, é denominado flexão composta oblíqua.

7.1 FLEXÃO COMPOSTA NORMAL

A flexão composta normal é caracterizada por apresentar apenas uma resultante de momento na seção transversal, podendo ser tanto em torno do eixo y, quanto em torno do eixo z (Figura 7.1).

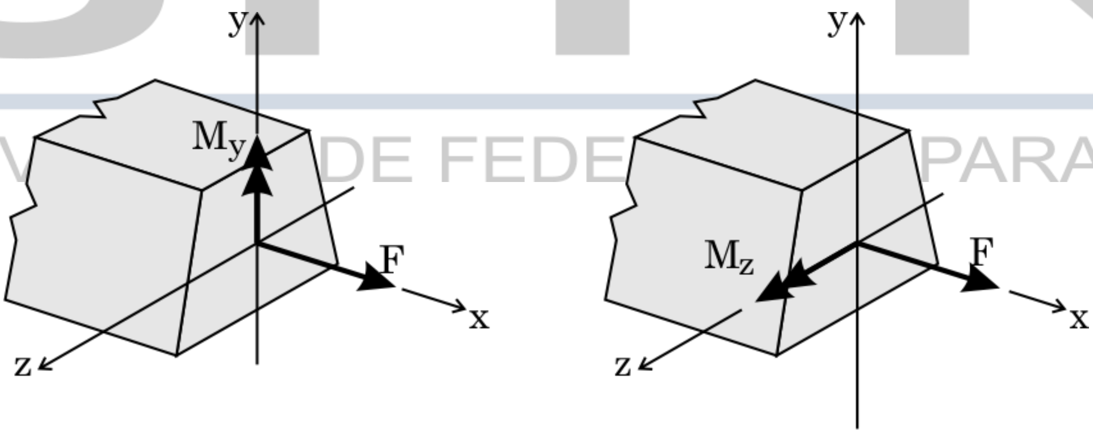
Os momentos fletores podem decorrer da excentricidade, com relação ao eixo do elemento, de força atuando na direção longitudinal, conforme ilustra a Figura 7.1, desde que a carga sempre se encontre sobre um dos eixos principais de inércia.



(a) (b)

Figura 7.1: Flexão composta normal em y (a) e em z (b).

Essas excentricidades das cargas aplicadas fora do centro de gravidade resultam os momentos ilustrados na Figura 7.2.



(a) (b)

Figura 7.2: Momentos causados pelas cargas fora do centroide em y (a) e z (b).

Sendo que, esses momentos podem ser escritos em função da carga F.

$$M_y = Fe_z \quad e \quad M_z = Fe_y \qquad \text{Equação 7.1}$$

7.1.1 EQUAÇÃO DAS TENSÕES

A distribuição das tensões normais na seção transversal é equivalente a sobreposição das tensões normais, causadas pela carga F quando localizada no centroide da seção, com as tensões de flexão decorrentes dos momentos M_y ou M_z, dependendo da excentricidade original da carga F. A Figura 7.3 mostra essa sobreposição para o momento M_z. A sobreposição para My é idêntica, porém com a flexão ocorrendo no sentido do eixo z e a linha neutra coincidindo com o eixo y.

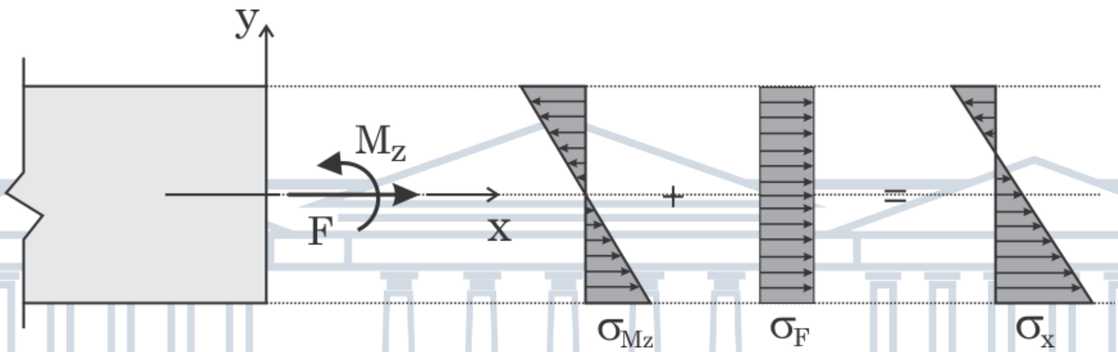


Figura 7.3: Sobreposição das tensões normais e de flexão em z.

Portanto, a tensão normal na seção transversal pode ser escrita como:

$$\sigma_x = \sigma_F \pm \sigma_{Mz} \qquad \text{Equação 7.2}$$

Sabendo-se que a tensão normal causada pela carga F no centroide pode ser escrita como F/A, sendo A a área de seção transversal, e que a tensão de flexão em z pode ser escrita como $M_z.y/I_z$, sendo I_z o momento de inércia em relação ao eixo z e e_y a excentricidade original da carga F. Portanto, a tensão normal total pode ser reescrita como:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} \qquad \text{Equação 7.3}$$

Caso a excentricidade da força F ocorra sobre o eixo z, Figura 7.1b, a tensão normal é calculada como:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \pm \frac{M_y z}{I_y} \qquad \text{Equação 7.4}$$

Os sinais são utilizados avaliando-se as tensões de acordo com a posição da carga excêntrica na seção transversal, ou desde que sejam adotados os sinais dos momentos, anti-horário positivo e horário negativo, e os sinais da excentricidade e_y (ou e_z, conforme o caso), de acordo com os eixos coordenados. Nesse último caso o sinal na Equação 7.3 é negativo, e na Equação 7.4 positivo. Para a tensão normal, o sinal é dado pelo sentido da tensão, compressão ou tração. No caso desse exemplo, as tensões normais são de tração, caso fossem de compressão, o sinal na frente de σ_F seria negativo.

7.1.2 POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA

A determinação da posição da linha neutra é feita baseando-se na sua principal propriedade, as tensões normais são nulas em todo o seu comprimento. Substituindo-se $\sigma_x = 0$ na Equação 7.3, chega-se a:

$$\frac{F}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} = 0 \qquad \text{Equação 7.5}$$

Sendo y_0 a posição da linha neutra, Mz/F a excentricidade e_y e i_z^2 o quadrado do raio de giração, dado por I_z/A, a Equação 7.5 pode ser reescrita isolando-se F/A:

$$\frac{F}{A}\left(1 \pm \frac{e_y y_0}{{i_z}^2}\right) = 0 \qquad \text{Equação 7.6}$$

Portanto, a posição da linha neutra é dada por:

$$y_0 = -\frac{{i_z}^2}{e_y} \qquad \text{Equação 7.7}$$

Caso a excentricidade normal ocorra no eixo y, Figura 7.1b, a posição da linha neutra é dada por:

$$z_0 = -\frac{{i_y}^2}{e_z} \qquad \text{Equação 7.8}$$

Sendo o quadrado do raio de giração dado pela relação I_y/A. O sinal negativo em ambas as equações é definido levando-se em conta que o valor de e_y ou de e_z será considerado com o sinal relativo aos eixos y e z, respectivamente.

Na prática, a flexão composta ocorre frequentemente em pilares, em vigas protendidas, em muros de arrimo, etc. O estudo da flexão composta deve ser feito com todas as cargas reduzidas ao centroide da seção transversal.

7.2 FLEXÃO COMPOSTA OBÍQUA

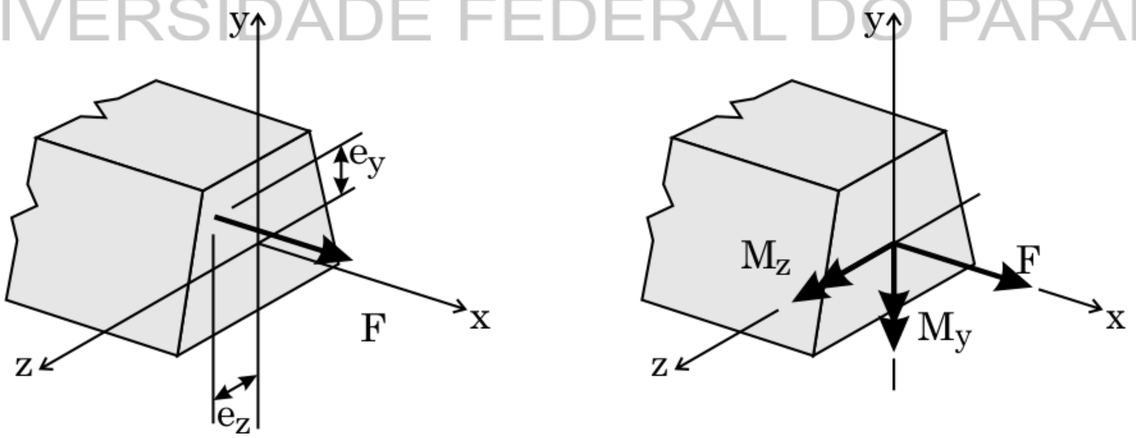


Figura 7.4: Flexão composta oblíqua (a) e momentos causados pelas cargas fora do centroide em y e z ao mesmo tempo (b).

A flexão composta oblíqua é caracterizada por apresentar resultantes de momento na seção transversal em torno do eixo y, quanto em torno do eixo z (Figura 7.4). Assim como na flexão composta normal, os momentos fletores podem decorrer da excentricidade, com relação ao eixo do elemento, de força atuando na direção longitudinal, conforme ilustra a Figura 7.4b.

Sendo que, da mesma forma que anteriormente, esses momentos podem ser escritos em função da carga F.

$$M_y = Fe_z \quad \text{e} \quad M_z = Fe_y$$ Equação 7.9

7.2.1 EQUAÇÃO DAS TENSÕES

A distribuição das tensões normais na seção transversal é equivalente a sobreposição das tensões normais, causadas pela carga F quando localizada no centroide da seção, com as tensões de flexão decorrentes dos momentos M_y e M_z. A Figura 7.5 mostra essa sobreposição para o momento M_z. A sobreposição para My é idêntica, porém com a flexão ocorrendo no sentido do eixo z e a linha neutra coincidindo com o eixo y.

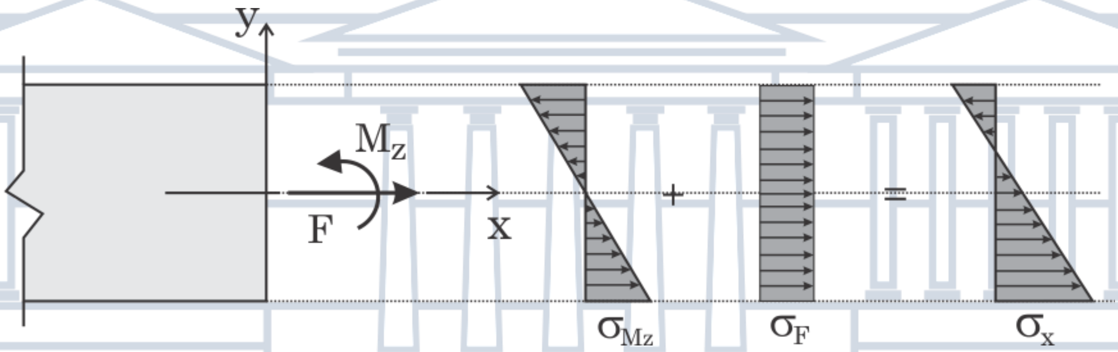


Figura 7.5: Sobreposição das tensões normais e de flexão em z.

Portanto, a tensão normal na seção transversal pode ser escrita como:

$$\sigma_x = \sigma_F \pm \sigma_{Mz} \pm \sigma_{My}$$ Equação 7.10

Sabendo-se que a tensão normal causada pela carga F no centroide pode ser escrita como F/A, sendo A a área de seção transversal, a tensão de flexão em z pode ser escrita como $M_z.y/I_z$, sendo I_z o momento de inércia em relação ao eixo z e e_y a excentricidade original da carga F em relação ao eixo z, e a tensão de flexão em y escrita como $M_y.z/I_y$, sendo I_y o momento de inércia em relação ao eixo y e e_z a excentricidade original da carga F em relação ao eixo y. Portanto, a tensão normal total pode ser reescrita como:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}$$ Equação 7.11

7.2.2 POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA

A determinação da posição da linha neutra é feita baseando-se na sua principal propriedade, as tensões normais são nulas em todo o seu comprimento. Substituindo-se $\sigma_x = 0$ na Equação 7.11, chega-se a:

$$\frac{F}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y} = 0$$ Equação 7.12

Sendo y_0 a posição da linha neutra, Mz/F a excentricidade e_y e i_z^2 o quadrado do raio de giração em z, dado por I_z/A, e z_0 a posição da linha neutra, My/F a excentricidade e_z e i_y^2 o quadrado do raio de giração em y, dado por I_y/A, a Equação 7.5 pode ser reescrita isolando-se F/A:

$$\frac{F}{A}\left(1 \pm \frac{e_y y_0}{{i_z}^2} \pm \frac{e_z z_0}{{i_y}^2}\right) = 0$$ Equação 7.13

A linha neutra pode ser encontrada, se estiver cortando os eixos y e z, através de dois pontos localizados sobre esses eixos. Para achar o ponto no eixo y, substitui-se $z_0 = 0$ na Equação 7.13, e para achar o ponto no eixo z, substitui-se y0 = 0 também na Equação 7.13.

Portanto, a posição da linha neutra no eixo y é dada por:

$$y_0 = -\frac{{i_z}^2}{e_y}$$ Equação 7.14

Sendo o quadrado do raio de giração em z dado pela relação I_z/A. E a posição da linha neutra no eixo z por:

$$z_0 = -\frac{{i_y}^2}{e_z}$$ Equação 7.15

Sendo o quadrado do raio de giração em y dado pela relação I_y/A. Da mesma forma que comentado anteriormente, os valores de e_y e e_z devem entrar com o sinal nas equações da posição da linha neutra.

7.3 TENSÕES NORMAIS MÁXIMAS

Os pontos de máximas tensões são encontrados através de retas paralelas à linha neutra posicionadas nos extremos da seção transversal, conforme ilustra a Figura 7.6.

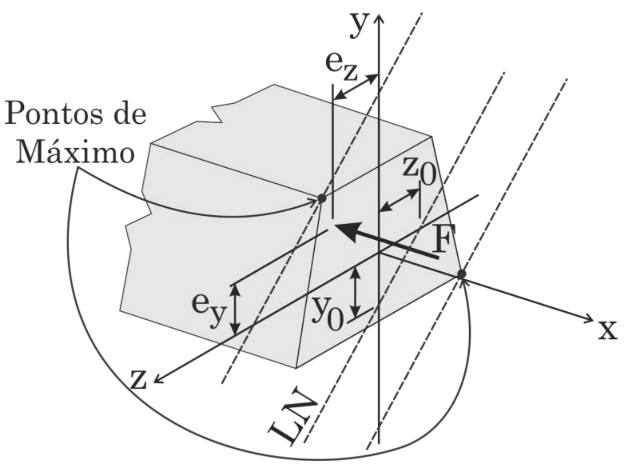


Figura 7.6: Pontos de tensão máxima na seção transversal.

7.4 NÚCLEO CENTRAL DE INÉRCIA

O núcleo central de inércia é o lugar geométrico da seção transversal tal que, se nele for aplicada uma carga de compressão F, toda a seção estará comprimida.

A determinação dessa região pode ser feita através da análise das distribuições das tensões na seção transversal. Por exemplo, seja a flexão composta normal em torno do eixo z, conforme ilustra a Figura 7.7.

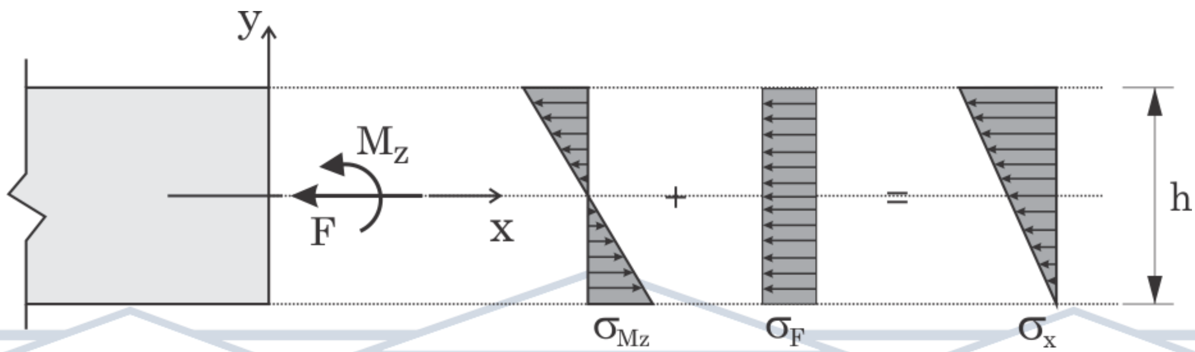


Figura 7.7: Distribuição das tensões normais e de flexão em z.

O objetivo é fazer com que a soma das tensões de tração causadas pela flexão com as tensões normais de compressão seja igual a zero, para que toda a seção transversal fique comprimida, ou seja:

$$\sigma_F = \sigma_{Mz} \qquad \text{Equação 7.16}$$

Substituindo as equações das tensões:

$$\frac{F}{A} = \frac{M_z y}{I_z} \qquad \text{Equação 7.17}$$

Sendo que o valor de y é a distância da linha neutra até o ponto onde ocorre a maior tensão de tração de flexão causada pelo momento M_z.

Como o momento Mz surgiu pela excentricidade do carregamento longitudinal F, pode ser escrito como Fe_y. Substituindo na equação e isolando e_y:

$$e_y = \frac{I_z}{Ay} \qquad \text{Equação 7.18}$$

Fazendo a mesma dedução para a componente M_y, chega-se a:

$$e_z = \frac{I_y}{Az} \qquad \text{Equação 7.19}$$

Sendo que o valor de z é a distância da linha neutra até o ponto onde ocorre a maior tensão de tração de flexão causada pelo momento M_y.

Se a seção transversal for retangular, os valores de e_y e e_z são:

$$e_y = \frac{1}{6}h \quad e \quad e_z = \frac{1}{6}b$$ Equação 7.20

E o núcleo central de inércia é ilustrado na Figura 7.8.

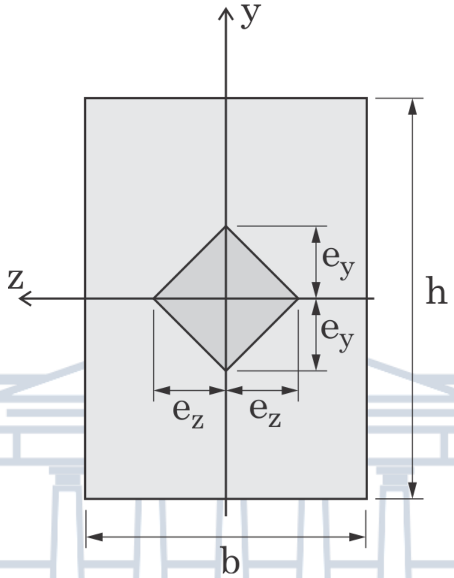


Figura 7.8: Núcleo central de inercia seção retangular.

Portanto, qualquer carga que esteja aplicada dentro do losango ilustrado na Figura 7.8, ou seja, dentro do núcleo central de inércia, somente existirão tensões de compressão na seção transversal.

A determinação do núcleo central de inércia é útil para identificar possíveis regiões sem resistência em materiais que não resistem a tração, ou ainda, identificar a região onde o carregamento deve ser aplicado em seções transversais de tais materiais, para que somente exista compressão na seção transversal e a mesma seja utilizada em sua totalidade na resistência da peça. Um exemplo clássico são sapatas de fundação.