

## 9 ESTADO PLANO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

As tensões e deformações em um ponto, no interior de um corpo no espaço tridimensional referenciado por um sistema cartesiano de coordenadas, consistem de três componentes normais e três componentes tangenciais, caracterizando um estado triplo de tensões e deformações. No entanto, dependendo da geometria do corpo e do modo como é carregado, é possível simplificar as componentes de tensão e deformação, reduzindo o seu número. Essas simplificações são conhecidas como estado plano de tensões e estado plano de deformações.

### 9.1 ESTADO PLANO DE TENSÕES

Se um corpo possui uma espessura pequena e está submetido apenas a forças aplicadas na direção perpendicular a essa espessura, as tensões,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ , são nulas em ambas as faces e no seu interior. Portanto, o estado de tensões desse corpo pode ser descrito pelo estado de tensões no plano médio a sua espessura quando submetido a um carregamento contido desse mesmo plano. Essa simplificação é conhecida como estado plano de tensões.

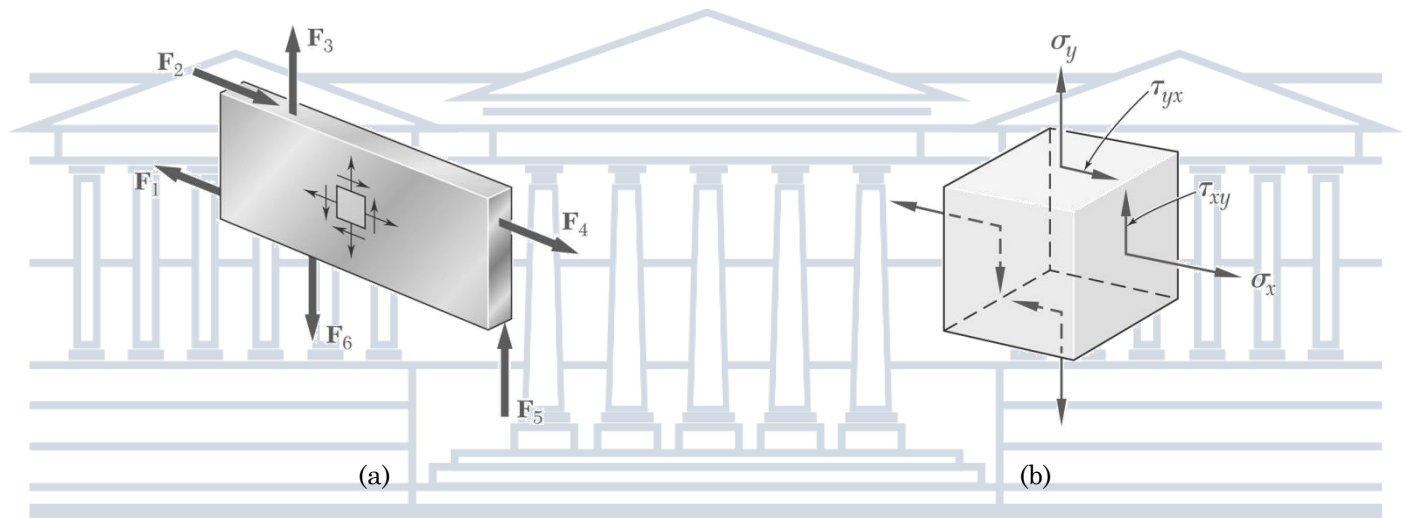


Figura 9.1: Corpo que pode ser simplificado pelo estado plano de tensões (a), estado de tensões no interior do corpo (b).

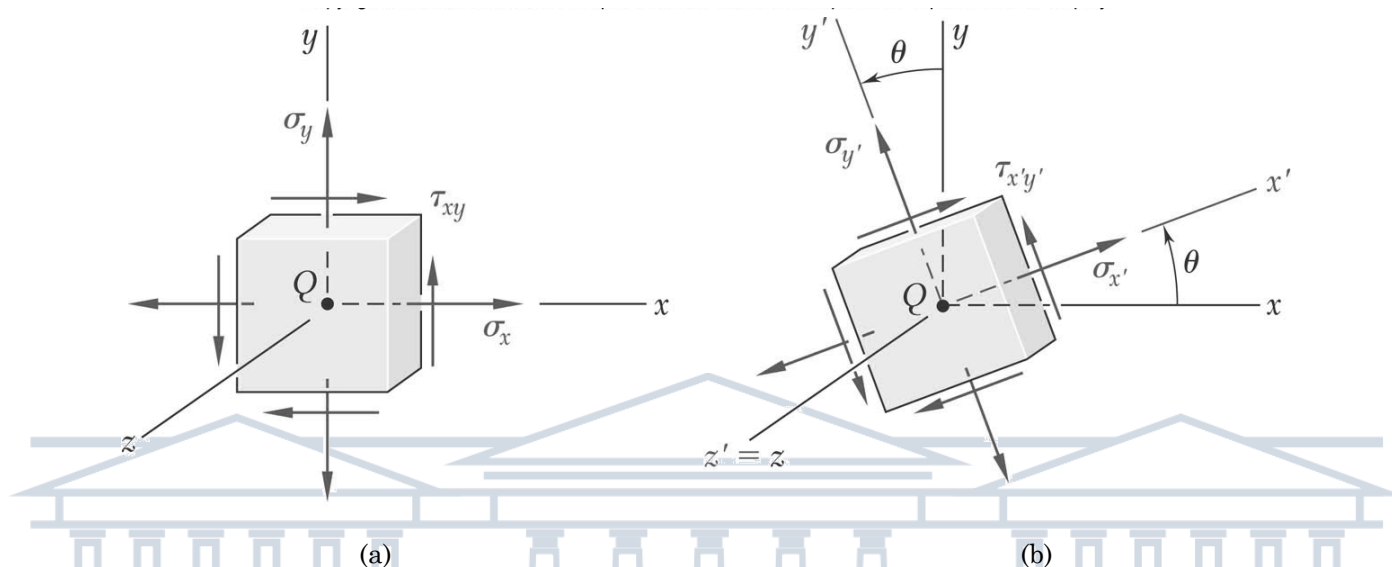
O estado plano de tensões é definido pelas componentes de tensão  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , e pelas componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ . Embora a tensão  $\sigma_z$ , perpendicular ao plano médio do corpo, seja nula, a deformação não é. Essas componentes de deformação e tensão se relacionam através da lei de Hooke para o estado plano de tensões.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ \frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{Equação 9.1}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} \begin{bmatrix} \nu - 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & \nu - 1 & -\nu \\ \frac{2\nu - 1}{2} & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Equação 9.2}$$

### 9.1.1 TRANSFORMAÇÃO DO ESTADO PLANO DE TENSÕES

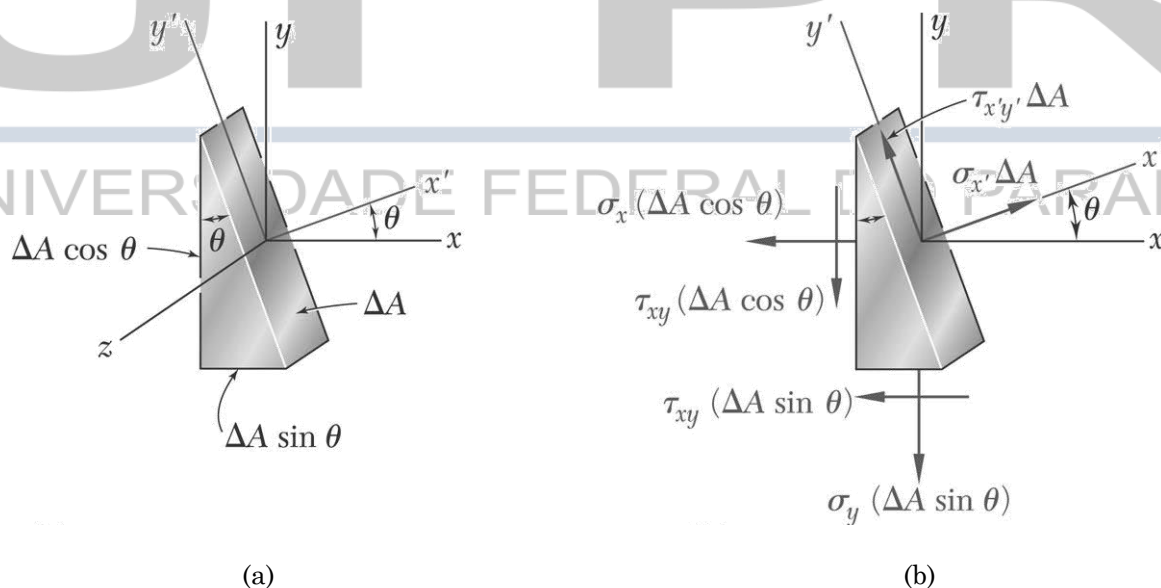
Seja um ponto  $Q$  no interior de um corpo que pode ser simplificado e analisado pelo estado plano de tensões, referenciado a um sistema de coordenadas cartesianas  $xyz$  com origem em  $Q$ , conforme ilustra a Figura 9.2a.



**Figura 9.2: Estado plano de tensões do ponto  $Q$  no referencial  $xyz$  (a) e no referencial  $x'y'z'$  (b).**

Agora, considere que esse mesmo ponto  $Q$  esteja referenciado por um novo sistema de coordenadas cartesianas  $x'y'z'$ , também com origem em  $Q$ , com os eixos  $z$  e  $z'$  coincidentes, mas com uma rotação de  $\theta$  entre os eixos  $x$ ,  $x'$  e  $y$ ,  $y'$ , conforme ilustra a Figura 9.2b. As componentes de tensões nesse novo referencial,  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  e  $\tau_{x'y'}$ , podem ser calculadas em função das componentes decompostas em  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , em função do ângulo  $\theta$ .

A determinação das componentes da tensão normal  $\sigma_{x'}$  e da tensão de cisalhamento  $\tau_{x'y'}$  que atuam na face perpendicular ao eixo  $x'$ , considera-se um elemento prismático com faces respectivamente perpendiculares aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $x'$  (Figura 9.3a). Observamos que, se a área da face oblíqua é representada por  $\Delta A$ , as áreas das faces vertical e horizontal são, respectivamente, iguais a  $\Delta A \cos \theta$  e  $\Delta A \sin \theta$ . Conclui-se que as forças resultantes que atuam nas três faces são aquelas mostradas na Figura 9.3b, que devem estar em equilíbrio.



**Figura 9.3: Plano para decomposição das componentes de tensão  $\sigma_{x'}$  e  $\tau_{x'y'}$  (a) e componentes resultantes (b).**

Fazendo o equilíbrio das forças nas direções  $x'$  e  $y'$  e resolvendo-se para  $\sigma_{x'}$  e  $\tau_{x'y'}$  chega-se a:

$$\sum F_{x'} = 0$$

Equação 9.3

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sum F_{y'} = 0$$

Equação 9.4

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Utilizando-se das seguintes relações trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{e} \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

Equação 9.5

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Equação 9.6

Pode-se reescrever as Equação 9.3 e a Equação 9.4, na forma:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Equação 9.7

$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Equação 9.8

A expressão para a tensão normal  $\sigma_{y'}$  é obtida substituindo-se  $\theta$  na Equação 9.7 por  $\theta + 90^\circ$ , que é ângulo que o eixo  $y'$  forma com o eixo  $x$ . Como  $\cos(2\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$  e  $\sin(2\theta + 180^\circ) = -\sin 2\theta$ , chega-se a:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Equação 9.9

Somando-se as Equação 9.7 e Equação 9.9 membro a membro, chega-se a:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

Equação 9.10

Ou seja, no caso do estado plano de tensões, a soma das tensões normais que atuam em um elemento do corpo é independente da orientação desse elemento.

### 9.1.2 TENSÕES PRINCIPAIS E TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA

As Equação 9.7 e Equação 9.8 obtidas na seção anterior são as equações paramétricas de uma circunferência. Isso significa que, se for escolhido um sistema de eixos cartesianos ortogonais e representar um ponto M de abscissa  $\sigma_{x'}$  e ordenada  $\tau_{x'y'}$  para um dado valor do parâmetro  $\theta$ , todos os pontos assim obtidos pertencerão a uma

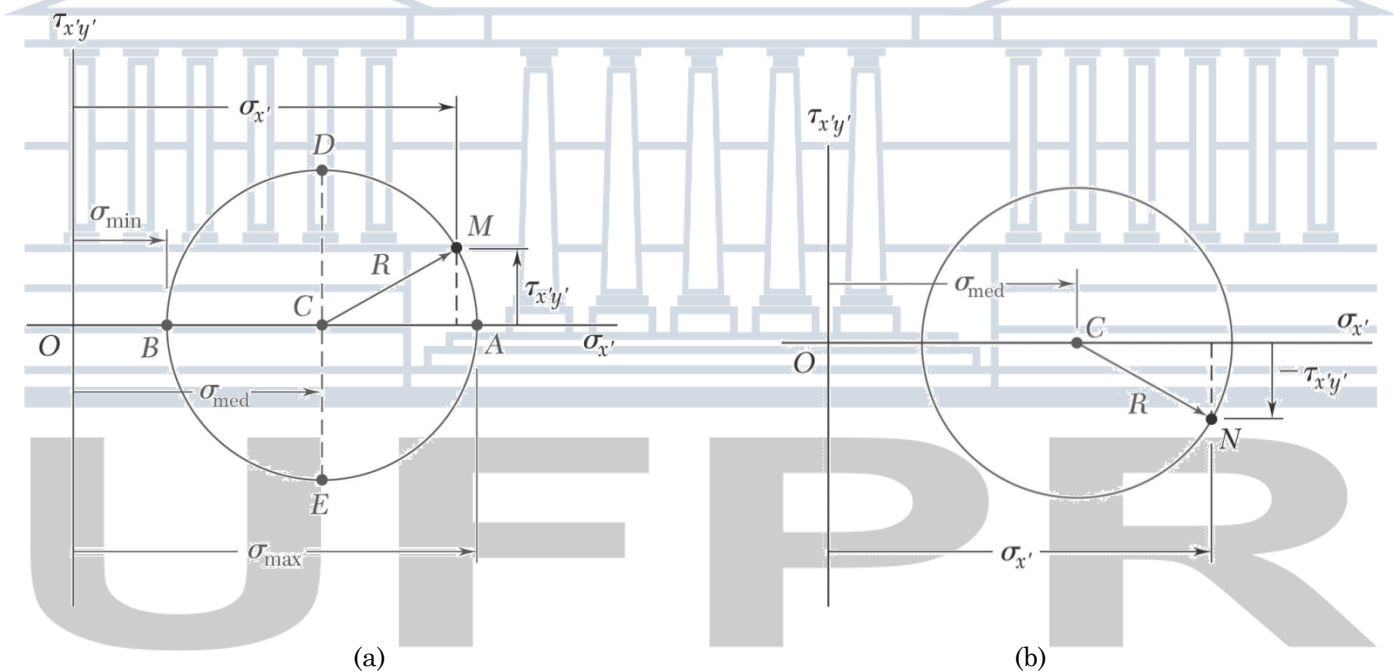
circunferência. Para estabelecer essa propriedade eliminar  $\theta$  dessas equações, primeiro passa-se  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  para o primeiro membro da Equação 9.7 e elevando ao quadrado ambos os membros da equação, depois elevando ao quadrado ambos os membros da Equação 9.8, somando membro a membro as duas equações obtidas dessa forma e por fim, definindo:

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{Equação 9.11}$$

Pode-se escrever a equação:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{med}})^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \quad \text{Equação 9.12}$$

que é a equação de uma circunferência de raio  $R$  centrado no ponto  $C$  de abscissa  $\sigma_{\text{med}}$  e ordenada 0 (Figura 9.4a).



**Figura 9.4: Circunferência do estado plano de tensões (a) e circunferência definida para o ponto N (b).**

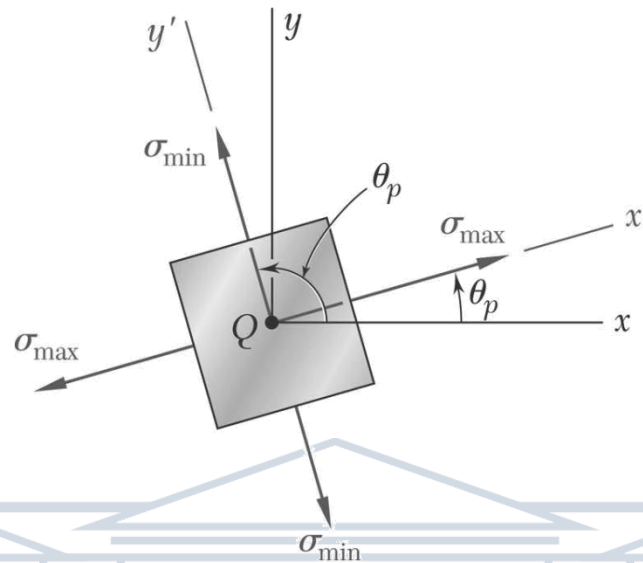
Pode-se observar que, em virtude da simetria da circunferência em relação ao eixo horizontal, o mesmo resultado teria sido obtido se, em vez de representar o ponto  $M$ , tivesse sido representado um ponto  $N$  de abscissa  $\sigma_x'$  e ordenada  $-\tau_{x'y'}$  (Figura 9.4b).

Os dois pontos  $A$  e  $B$  em que a circunferência da Figura 9.4a intercepta o eixo horizontal são de especial interesse. O ponto  $A$  corresponde ao valor máximo da tensão normal  $\sigma_x'$ , enquanto o ponto  $B$  corresponde a seu valor mínimo. Além disso, ambos os pontos correspondem a um valor zero de  $\tau_{x'y'}$ . Assim, os valores de  $\theta_p$  do ângulo  $\theta$  que correspondem aos pontos  $A$  e  $B$  podem ser obtidos fazendo-se  $\tau_{x'y'}=0$  na Equação 9.8, ou seja:

$$\text{tg}2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{Equação 9.13}$$

Essa equação define dois valores de  $2\theta_p$  que estão defasados de  $180^\circ$  e, portanto, dois valores de  $\theta_p$  defasados de

90°, sendo que qualquer um desses dois valores pode ser usado para definir a orientação do elemento correspondente, conforme mostra a Figura 9.5.



**Figura 9.5: Elemento orientado nas direções principais.**

Os planos que contêm as faces do elemento obtido dessa maneira são chamados de planos principais de tensão no ponto Q, e os valores definidos pelas tensões correspondentes  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  das tensões normais que atuam nesses planos são chamados de tensões principais em Q. Da Figura 9.5 está claro que nenhuma tensão de cisalhamento atua nos planos principais, ou seja, da Figura 9.4a pode-se escrever que:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{med}} + R \quad \text{e} \quad \sigma_{\min} = \sigma_{\text{med}} - R \quad \text{Equação 9.14}$$

Substituindo  $\sigma_{\text{med}}$  e R da Equação 9.11:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{Equação 9.15}$$

Observando-se novamente a Figura 9.4a nota-se que os pontos D e E localizados no diâmetro vertical da circunferência correspondem ao maior valor numérico da tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$ . Como a abscissa dos pontos D e E é  $\sigma_{\text{med}} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ , os valores de  $\theta_s$  do parâmetro  $\theta$  correspondentes a esses pontos são obtidos fazendo-se  $\sigma_{x'} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$  na Equação 9.7. Conclui-se que a soma dos dois últimos termos naquela equação deve ser zero e, portanto, chega-se a:

$$\text{tg}2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad \text{Equação 9.16}$$

Essa equação define dois valores  $2\theta_s$  defasados em 180° e, portanto, dois valores  $\theta_s$  defasados em 90°. Qualquer um desses valores pode ser utilizado para determinar a orientação do elemento correspondente à tensão de cisalhamento máxima (Figura 9.6). Observando na Figura 9.4a que o valor máximo da tensão de cisalhamento é igual ao raio R da circunferência, e lembrando a segunda Equação 9.11, chega-se a:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Equação 9.17

O valor dado por essa equação é conhecido como tensão de cisalhamento máxima para o estado plano de tensão.

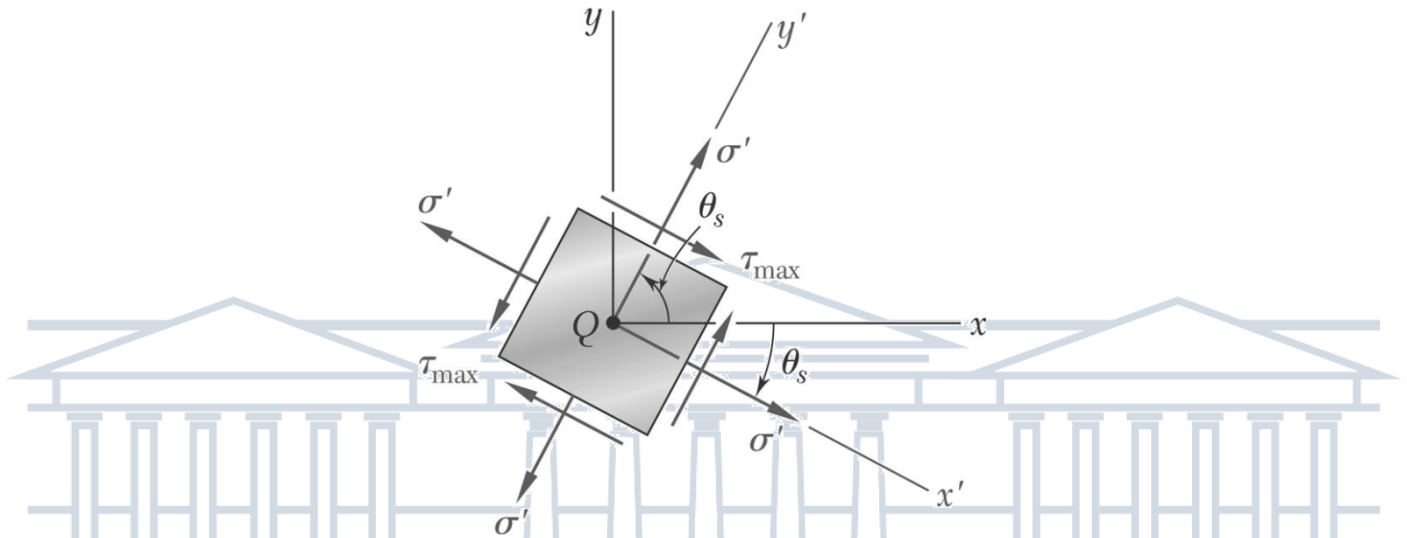


Figura 9.6: Elemento orientado de acordo com a tensão de cisalhamento máxima.

Conforme observado anteriormente, a tensão normal correspondente a tensão máxima de cisalhamento é:

$$\sigma' = \sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Equação 9.18

Comparando as Equação 9.13 e Equação 9.16, nota-se que  $\text{tg } 2\theta_s$  é o inverso negativo de  $\text{tg } 2\theta_p$ . Isso significa que os ângulos  $2\theta_s$  e  $2\theta_p$  estão defasados em  $90^\circ$  e, portanto, que os ângulos  $\theta_s$  e  $\theta_p$  estão defasados em  $45^\circ$ . Conclui-se então que os planos de tensão de cisalhamento máxima estão defasados em  $45^\circ$  dos planos principais.

A circunferência usada para deduzir algumas das fórmulas básicas relacionadas com a transformação de tensões no estado plano de tensão foi introduzida inicialmente pelo engenheiro alemão Otto Mohr (1835 -1918) e é conhecida como círculo de Mohr para o estado plano de tensão.

## 9.2 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Se um corpo é carregado mediante forças perpendiculares a seu eixo longitudinal, que não variam nessa direção e estão em equilíbrio, pode-se supor que todas as seções transversais do corpo estão em iguais condições. Em princípio, pode-se imaginar que as seções extremas se encontram entre planos rígidos fixos (Figura 9.7a), de forma que qualquer deslocamento na direção axial não é possível. Deste modo, as deformações na direção axial são nulas, resultando apenas as deformações  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ , que definem o estado plano de deformações.

Essa situação também é possível em uma barra de comprimento infinito com seus lados submetidos a forças uniformemente distribuídas, pois, em razão da simetria, os elementos localizados em um dado plano transversal não podem se mover para fora desse plano. Esse modelo idealizado mostra que, no caso real de uma barra longa submetida a forças transversais uniformemente distribuídas (Figura 9.7b), existe um estado plano de deformação em qualquer seção transversal desde que essa seção não esteja localizada muito perto de qualquer uma das extremidades da barra. O estado plano de deformações é definido pelas componentes de tensão  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ , e

pelas componentes de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ . Embora a deformação  $\epsilon_z$ , perpendicular ao plano médio do corpo, seja nula, a tensão não é.

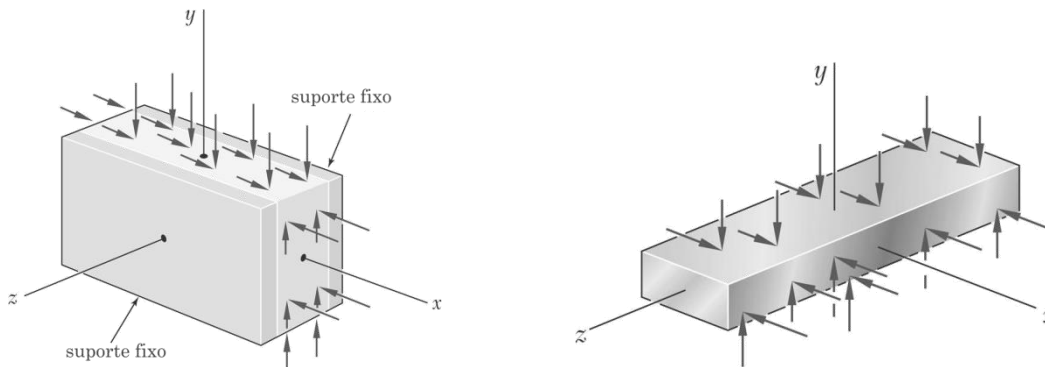


Figura 9.7: Corpo que pode ser simplificado pelo estado plano de deformações (a), barra longa submetida a forças laterais (b).

Essas componentes de deformação e tensão se relacionam através da lei de Hooke para o estado plano de tensões.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{Equação 9.19}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(\nu + 1)(2\nu - 1)} \begin{bmatrix} \nu - 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & \nu - 1 & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\nu - 1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Equação 9.20}$$

### 9.2.1 TRANSFORMAÇÃO DO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

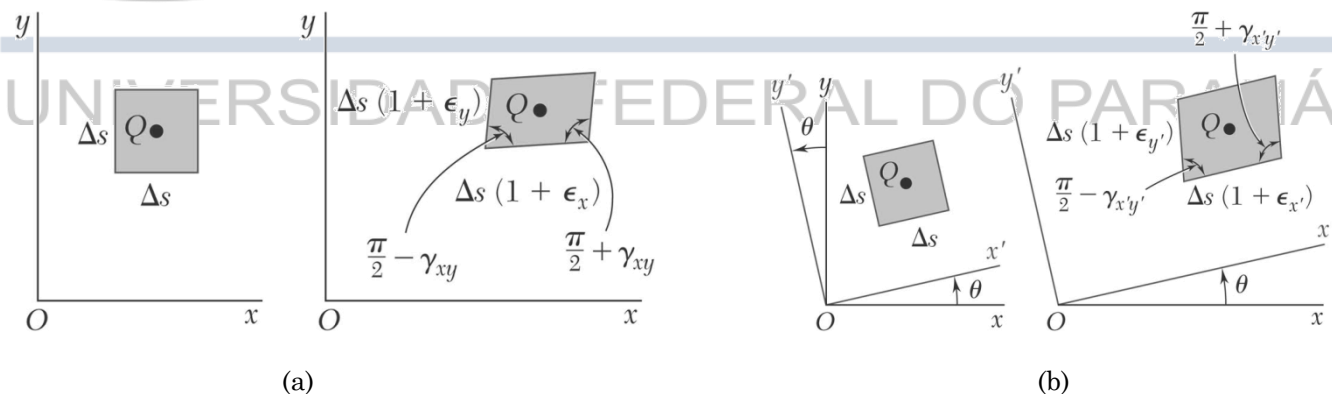
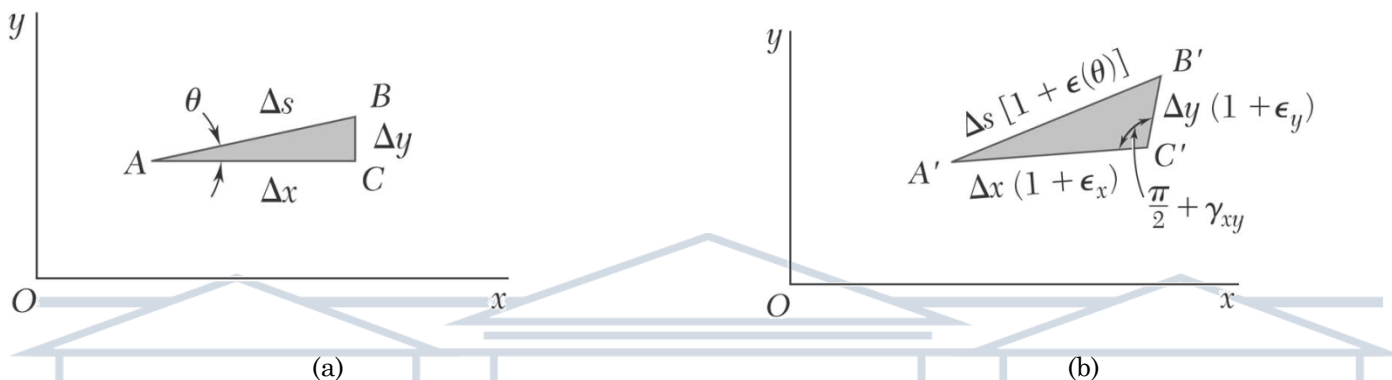


Figura 9.8: Deformação de um quadrado circunscrito a um ponto Q de um corpo submetido ao estado plano de deformações (a), deformações no quadrado do ponto Q no referencial x'y' (b).

Supondo que exista um estado plano de deformação no ponto Q (com  $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ ), e que seja definido pelas componentes de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  associadas com os eixos x e y, pode-se separar um elemento quadrado de centro Q, com lados de comprimento  $\Delta s$  respectivamente paralelos aos eixos x e y, que é deformado transformando-se em um paralelogramo com lados de comprimento respectivamente iguais a  $\Delta s(1 + \epsilon_x)$  e  $\Delta s(1 + \epsilon_y)$ .

$\epsilon_y$ ), formando ângulos de  $\pi/2 + \gamma_{xy}$  entre si (Figura 9.8). O objetivo é determinar em termos de  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  e  $\theta$  as componentes de tensão  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  e  $\tau_{x'y'}$  associadas com o sistema de referencia  $x'y'$  obtido pela rotação dos eixos  $x$  e  $y$  de um ângulo  $\theta$ . Como mostra a Figura 9.8b, essas novas componentes de deformação definem o paralelogramo no qual um quadrado com lados respectivamente paralelos aos eixos  $x'$  e  $y'$  é deformado.

Primeiro deduz-se uma expressão para a deformação específica normal  $\epsilon(\theta)$  ao longo de uma linha AB que forma um ângulo arbitrário  $\theta$  com o eixo  $x$ . Para fazer isso, considera-se o triângulo retângulo ABC que tem o lado AB como hipotenusa (Figura 9.9a), e o triângulo oblíquo A'B'C' no qual o triângulo ABC é deformado (Figura 9.9b).



**Figura 9.9:** Linha AB formando um ângulo qualquer com o eixo  $x$  e um triângulo (a) e componentes do triângulo com deformação de cisalhamento.

Chamando de  $\Delta s$  o comprimento de AB, expressamos o comprimento de A'B' como  $\Delta s [1 + \epsilon(\theta)]$ . Analogamente, chamando de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  os comprimentos dos lados AC e CB, expressamos os comprimentos de A'C' e C'B' como  $\Delta x (1 + \epsilon_x)$  e  $\Delta y (1 + \epsilon_y)$ , respectivamente. Lembrando-se da Figura 9.8 que o ângulo reto em C na Figura 9.8a se transforma em um ângulo igual a  $\pi/2 + \gamma_{xy}$  na Figura 9.8b, e aplicando a lei dos cossenos ao triângulo A'B'C', sabendo que  $\Delta x = \Delta s \cos \theta$ ,  $\Delta y = \Delta s \sin \theta$  e que  $\gamma_{xy}$  é muito pequeno, lembrando-se da relação  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$  e desprezando os termos de segunda ordem, chega-se a:

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad \text{Equação 9.21}$$

A Equação 9.21 permite determinar a deformação específica normal  $\epsilon(\theta)$  em qualquer direção AB, em termos das componentes de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  e do ângulo  $\theta$  que AB forma com o eixo  $x$ . Verificamos que, para  $\theta = 0$ , a Equação 9.21 fornece  $\epsilon(0) = \epsilon_x$  e que, para  $\theta = 90^\circ$ , ela fornece  $\epsilon(90^\circ) = \epsilon_y$ . No entanto, fazendo  $\theta = 45^\circ$  na Equação 9.21, obtemos a deformação normal na direção da bissetriz OB do ângulo formado pelos eixos  $x$  e  $y$ . Chamando essa deformação de  $\epsilon_{OB}$ , pode-se escrever.

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45^\circ) = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \quad \text{Equação 9.22}$$

Resolvendo essa equação para  $\gamma_{xy}$ :

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad \text{Equação 9.23}$$

Essa relação permite expressar a deformação de cisalhamento associada a um dado par de eixos retangulares em termos das deformações normais medidas ao longo desses eixos e de sua bissetriz. Sendo o objetivo expressar as componentes de deformação associadas ao sistema de referencia  $x'y'$  da Figura 9.8b em termos do ângulo  $\theta$  e das componentes de deformação  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  associadas aos eixos  $x$  e  $y$ , observa-se que a deformação normal  $\epsilon_x$  ao longo



do eixo  $x'$  é dada pela Equação 9.21. Usando as relações trigonométricas das Equação 9.5 e Equação 9.6, escrevemos essa equação na forma:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \text{Equação 9.24}$$

Substituindo  $\theta$  por  $\theta + 90^\circ$ , obtemos a deformação normal ao longo do eixo  $y'$ . Como  $\cos(2\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$  e  $\sin(2\theta + 180^\circ) = -\sin 2\theta$ :

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \text{Equação 9.25}$$

Somando membro a membro as equações acima, chega-se a:

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad \text{Equação 9.26}$$

Substituindo agora  $\theta$  por  $\theta = 45^\circ$  na Equação 9.24, obtemos uma expressão para a deformação normal ao longo da bissetriz  $OB'$  do ângulo formado pelos eixos  $x'$  e  $y'$ . Como  $\cos(2\theta = 90^\circ) = -\sin 2\theta$  e  $\sin(2\theta + 90^\circ) = \cos 2\theta$ , escrevendo a Equação 9.23 em relação aos eixos  $x'$  e  $y'$ , escreve-se a deformação de cisalhamento  $\gamma_{x'y'}$  nos termos das deformações normais medidas ao longo dos eixos  $x'$  e  $y'$  e da bissetriz  $OB'$ , e por fim, chega-se a:

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad \text{Equação 9.27}$$

## 9.2.2 DEFORMAÇÕES PRINCIPAIS E TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA

Como as equações para a transformação do estado plano de deformação têm a mesma forma das equações para transformação do estado plano de tensão, o uso do círculo de Mohr pode ser retomado para a análise do estado plano de deformação.

Definindo as variáveis do círculo como:

$$\varepsilon_{\text{med}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad \text{Equação 9.28}$$

Os pontos A e B em que o círculo de Mohr intercepta o eixo horizontal, que correspondem às deformações principais  $\varepsilon_{\text{max}}$  e  $\varepsilon_{\text{min}}$  são:

$$\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_{\text{med}} + R \quad \text{e} \quad \varepsilon_{\text{min}} = \varepsilon_{\text{med}} - R \quad \text{Equação 9.29}$$

Assim, os valores de  $\theta_p$  do ângulo  $\theta$  que correspondem aos pontos A e B podem ser obtidos fazendo-se  $\gamma_{x'y'}=0$  na Equação 9.27, ou seja:

$$\operatorname{tg}2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

Equação 9.30

Os eixos correspondentes a e b na Figura 9.10b são os eixos principais de deformação. O ângulo  $\theta_p$ , que define a direção do eixo principal Oa na Figura 9.10b correspondendo ao ponto A na Figura 9.10a, é igual à metade do ângulo XCA medido no círculo de Mohr, e a rotação que faz Ox coincidir com Oa tem o mesmo sentido da rotação que faz o diâmetro XY do círculo de Mohr coincidir com o diâmetro AB.

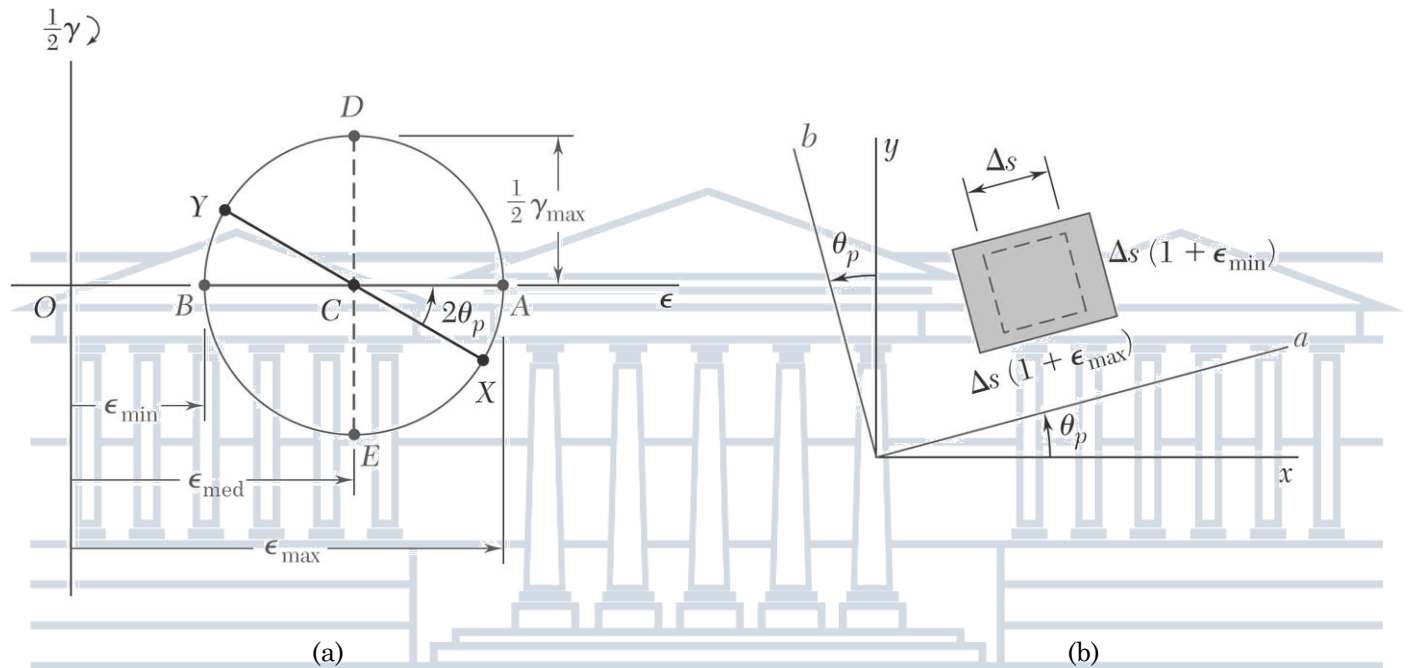


Figura 9.10: Círculo de Mohr para o estado plano de deformações (a), e as deformações principais (b)

A deformação de cisalhamento máxima no estado plano da deformação é definida pelos pontos D e E na Fig. 7.65a. Ela é igual ao diâmetro do círculo de Mohr, portanto:

$$\gamma_{max} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

Equação 9.31

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ