10 CRITÉRIOS DE RUPTURA

A avaliação das tensões e deformações sempre é feita em função de certas condições do material. Após o cálculo dessas variáveis existe a necessidade de confrontar os valores encontrados com certas quantidades limites pré-estabelecidas para verificar o estado em que o material, após as solicitações que venha a sofrer, se encontra. Em outras palavras, é necessário se identificar os valores de tensão e deformação que levarão o material a uma falha. Esses valores são obtidos através de ensaios experimentais para os diversos possíveis esforços presentes nas estruturas, como tração, compressão, os mais conhecidos e executados, e os de cisalhamento, torção e flexão, utilizados para finalidades específicas.

Quando a avaliação estrutural é feita em um elemento submetido a um estado uniaxial de tensão, por exemplo, uma barra submetida à tração, fica simples identificar se a tensão causada pela tração aplicada levará o material a falhar, basta compará-la com a tensão de escoamento, caso o material seja um material dúctil, ou coma tensão de ruptura, caso seja um material frágil, ambas obtidas com ensaios de tração dos materiais. Dessa forma, identificam-se o critério de ruptura para o material dúctil como sendo a tensão de escoamento, e para o material frágil e tensão de ruptura.

Quando o elemento estrutural está submetido a um estado multiaxial de tensões já não é tão simples assim. Para aplicar os resultados de um ensaio de tração, ou compressão, ou qualquer que seja para avaliar a falha do material, é necessário considerar o mecanismo real de falha, ou seja, é necessário identificar qual combinação de todas as componentes de tensão presentes no elemento estrutural, tração, compressão, cisalhamento, levará o material a falhar, seja por que a tensão normal máxima atingiu seu valor limite, ou a tensão de cisalhamento máxima, ou a energia de deformação máxima, ou qualquer outra variável atingiu o seu valor crítico.

Quatro teorias de falha serão estudadas, duas para materiais frágeis e duas para materiais dúcteis. As componentes das tensões serão expressas em termos das suas componentes principais máximas, média e mínima.

10.1 MATERIAIS FRÁGEIS

Um material é considerado frágil quando rompe sem aviso prévio. No caso de um ensaio de tração, a superfície de fratura desse material é plana, o que leva a conclusão que provém diretamente da componente de tensão normal presente na seção transversal. Por outro lado, caso seja submetido a um teste de torção, ocorre falha por fratura em planos de máxima tensão de tração, o que se conclui que materiais frágeis são menos resistentes à tração que ao cisalhamento.

Outra característica dos materiais frágeis é não apresentar patamar de escoamento durante um teste mecânico, podendo romper abruptamente ainda no regime elástico (Figura 10.1), como o caso, por exemplo, de materiais compósitos como a fibra de carbono. Outros exemplos de matérias frágeis são o ferro fundido, o vidro, a porcelana e o concreto.

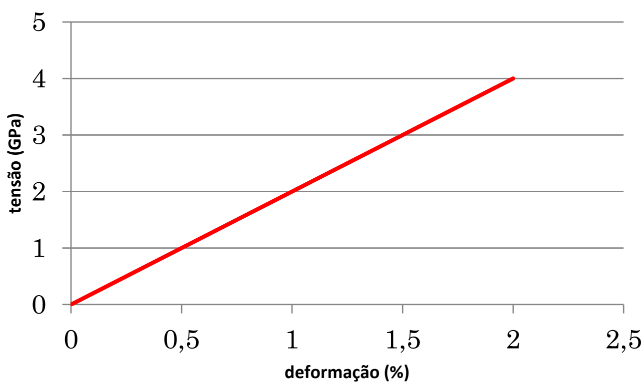


Figura 10.1: Gráfico tensão x deformação para um material frágil.

10.1.1 TEORIA DA TENSÃO NORMAL MÁXIMA – TEORIA DE RANKINE

A hipótese da teoria da tensão normal máxima considera que um elemento constituído de material frágil falha quando a tensão principal máxima no material atinge a tensão normal máxima que o material pode suportar em um teste de tração uniaxial. Esta teoria também admite que falhas em compressão ocorram na mesma tensão máxima que as falhas em tração.

No caso do estado plano de tensões, o critério da tensão normal máxima é dado pelas equações:

$$|\sigma_{max}| = \sigma_r$$
$$|\sigma_{min}| = \sigma_r$$

Equação 10.1

Sendo σ_r a tensão de ruptura do material em um teste de tração uniaxial.

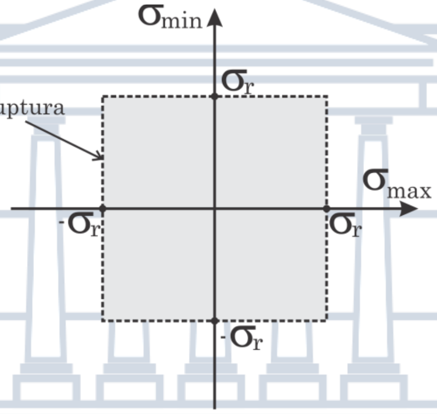


Figura 10.2: Superfície de ruptura para o critério da tensão normal máxima.

Plotando-se essas equações em um gráfico com os eixos σ_{max} e σ_{min}, obtém-se a superfície de falha para o critério da tensão normal máxima.

10.1.2 CRITÉRIO DE FALHA DE MOHR

Se a resistência máxima à compressão de um material frágil não é igual a sua resistência máxima a tração, a teoria da tensão normal máxima não pode ser utilizada. Uma teoria de falha que considera essa característica de certos materiais frágeis foi proposta por Otto Mohr e é chamada critério de falha de Mohr. A Figura 10.3 apresenta a curva envolvente das circunferências de Mohr das tensões principais máxima σ_{max} e mínima σ_{min} dos estados de tensão que provocam ruptura do material.

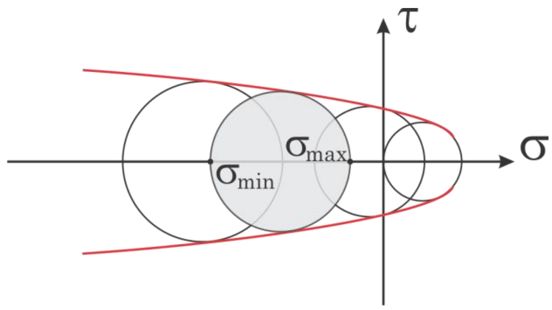


Figura 10.3: Envoltória de resistência de Mohr.

A determinação experimental dessa curva é feita aumentando-se proporcionalmente as tensões em um determinado estado de tensão até que se verifique a ruptura do material. A circunferência de Mohr definida por

σ_{max} e σ_{min} na ruptura é tangente à envolvente. Repetindo-se o procedimento para diversos estados de tensão, pode-se determinar um número suficiente de circunferências para definir a curva envolvente de Mohr.

Uma vez traçada a envolvente de Mohr para um determinado material, verifica-se facilmente se um dado estado de tensão provoca ou não a ruptura deste material, traçando-se a circunferência de Mohr das tensões principais máxima e mínima e verificando se ela intercepta ou não esta curva. Para simplificar a utilização desse método, Mohr admitiu que a envolvente de todas as circunferências pode ser aproximada com suficiente precisão através de duas retas, o que possibilita o seu traçado a partir dos resultados de ensaios de tração e compressão uniaxiais do material conforme apresentado na Figura 10.4.

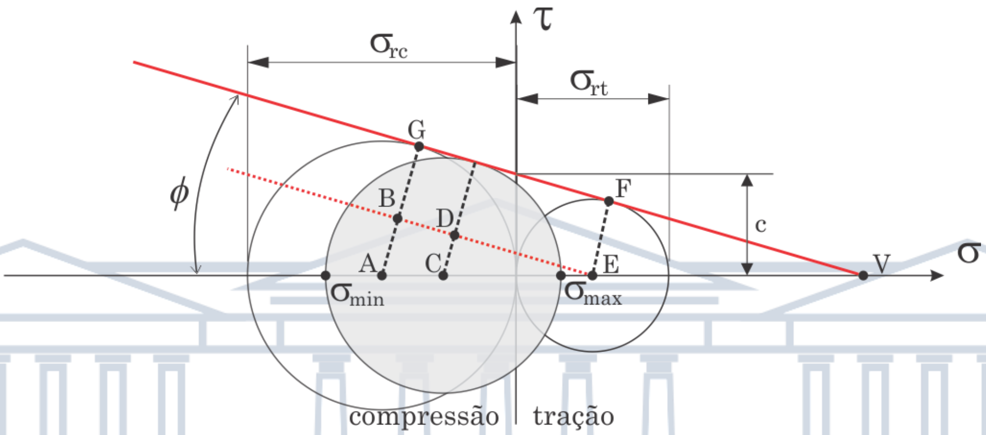


Figura 10.4: Critério de Ruptura de Mohr.

Na ruptura, o estado de tensão representado pelas tensões extremas σ_{max} e σ_{min} é tangente à envoltória. Essas tensões podem ser relacionadas com as tensões de ruptura do material em tração e compressão uniaxiais, σ_{rt} e σ_{rc}, em valor absoluto. Consideram-se, então, as relações obtidas através da Figura 10.4 (A é o centro do círculo de compressão, E é o centro do círculo de tração e C é o centro do círculo do estado principal de tensões do ponto analisado).

$$\overline{AB} = \frac{\sigma_{rc} - \sigma_{rt}}{2}$$

$$\overline{CD} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min} - \sigma_{rt}}{2}$$

Equação 10.2

$$\overline{AE} = \frac{\sigma_{rc} + \sigma_{rt}}{2}$$

$$\overline{CE} = \frac{\sigma_{rt} - \sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

Equação 10.3

Da mesma figura também se verifica facilmente por semelhança de triângulos, que a circunferência definida pelas tensões principais σ_{max} e σ_{min} do estado de tensão em estudo não ultrapassam a envolvente de resistência, isto é, o material não rompe, enquanto se verificar a condição:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} > \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \rightarrow \frac{\sigma_{rc} - \sigma_{rt}}{\sigma_{rc} + \sigma_{rt}} > \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min} - \sigma_{rt}}{\sigma_{rt} - \sigma_{max} + \sigma_{min}}$$

Equação 10.4

Se as tensões principais forem todas de tração, o critério de Mohr fornece resultados diferentes dos observados experimentalmente. Isto ocorre porque a envolvente de resistência aproximada por duas retas apresenta o vértice V que não existe na curva real. Nesses casos, deve-se utilizar o critério da tensão normal máxima, ou seja, deve se verificar a condição:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{rt} \qquad \text{Equação 10.5}$$

Como o material não suporta tensões de tração superiores a σ_{rt} ($\sigma_{max} \leq \sigma_{rt}$) e a Equação 10.4 somente fornece bons resultados para $\sigma_{min} < 0$, a quantidade σ_{rt} - σ_{max} - σ_{min} sempre resulta em valores positivos. Nestas condições, a Equação 10.4 é equivalente à condição:

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{rt}} - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{rc}} < 1 \qquad \text{Equação 10.6}$$

Esta expressão traduz o critério de Mohr para a previsão da ruptura de materiais frágeis. Em algumas aplicações deste critério, especialmente no campo da Mecânica dos Solos e Rochas, utilizam-se como parâmetros que caracterizam a ruptura o ângulo de atrito ϕ e a coesão c em vez de σ_{max} e σ_{min}. O ângulo ϕ indica o acréscimo de resistência às tensões tangenciais quando atua na face onde exista uma tensão normal de compressão. A coesão c indica a resistência às tensões tangenciais quando a tensão normal é nula. A expressão do critério de Mohr em função destes parâmetros pode ser deduzida a partir das relações entre os raios EF = $\sigma_{rt}/2$ e AG = $\sigma_{rc}/2$ e os parâmetros ϕ e c.

Da Figura 10.4, verifica-se facilmente que:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_{rt}}{2} + \dfrac{\sigma_{rt}}{2}\mathrm{sen}\phi = c\cos\phi \quad \rightarrow \quad \sigma_{rt} = \dfrac{2c\cos\phi}{1 + \mathrm{sen}\phi} \\ \dfrac{\sigma_{rc}}{2} - \dfrac{\sigma_{rc}}{2}\mathrm{sen}\phi = c\cos\phi \quad \rightarrow \quad \sigma_{rc} = \dfrac{2c\cos\phi}{1 - \mathrm{sen}\phi} \end{cases} \qquad \text{Equação 10.7}$$

Substituindo-se estes valores de σ_{rt} e σ_{rc} na Equação 10.6, obtém-se a expressão do critério de Mohr em função de c e ϕ. Assim, segundo este critério, o material não rompe enquanto se verificar a condição:

$$\sigma_{max}(1 + \mathrm{sen}\phi) - \sigma_{min}(1 - \mathrm{sen}\phi) < 2c\cos\phi \qquad \text{Equação 10.8}$$

Na Figura 10.5 representa esse critério no plano das tensões principais σ_{max} e σ_{min}. O critério de Mohr se reduz ao critério de Rankine quando $\sigma_{rc} = \sigma_{rt}$.

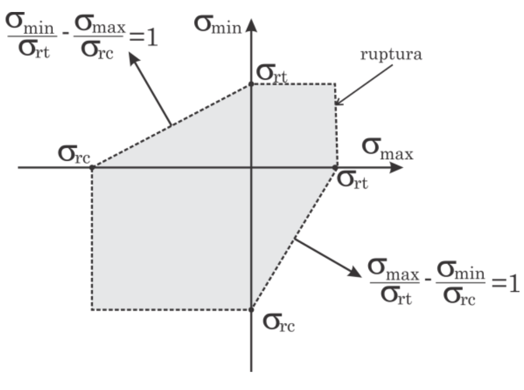


Figura 10.5: Critério de Mohr, caso bidimensional.

No espaço das tensões principais σ_{max}, σ_{med} e σ_{min}, o critério de Mohr é representado por uma pirâmide de base hexagonal irregular, Figura 10.6, as quais as faces laterais são definidas pelos planos descritos pelas equações:

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{rt}} - \frac{\sigma_{med}}{\sigma_{rc}} = 1 \quad (\sigma_{max} > \sigma_{min} > \sigma_{med})$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{rt}} - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{rc}} = 1 \quad (\sigma_{max} > \sigma_{med} > \sigma_{min})$$

$$\frac{\sigma_{med}}{\sigma_{rt}} - \frac{\sigma_{med}}{\sigma_{rc}} = 1 \quad (\sigma_{med} > \sigma_{max} > \sigma_{min})$$

$$\frac{\sigma_{med}}{\sigma_{rt}} - \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{rc}} = 1 \quad (\sigma_{med} > \sigma_{min} > \sigma_{max})$$

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{rt}} - \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{rc}} = 1 \quad (\sigma_{min} > \sigma_{med} > \sigma_{max})$$

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{rt}} - \frac{\sigma_{med}}{\sigma_{rc}} = 1 \quad (\sigma_{min} > \sigma_{max} > \sigma_{med})$$

Equação 10.9

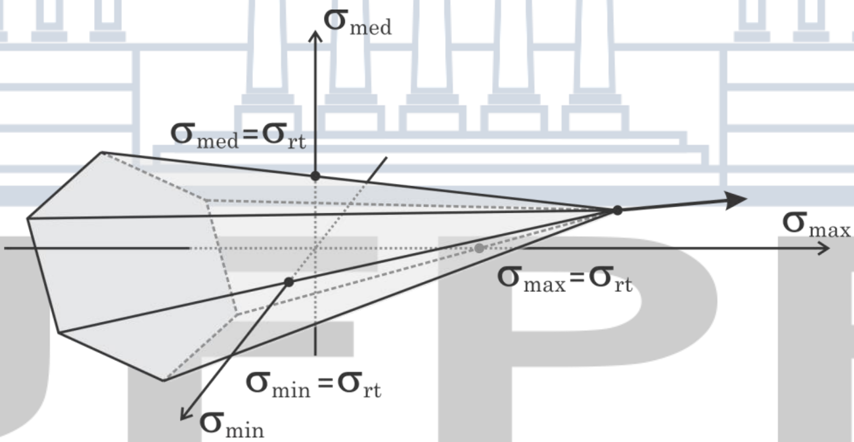


Figura 10.6: Critério de Mohr, caso tridimensional.

O vértice da pirâmide encontra-se sobre a reta cuja equação é $\sigma_{max}=\sigma_{med}=\sigma_{min}$, sendo as suas coordenadas dadas pela expressão:

$$\sigma_{max} = \sigma_{med} = \sigma_{min} = \frac{\sigma_{rt}\sigma_{rc}}{\sigma_{rc} - \sigma_{rt}} = \frac{c}{\tan\phi}$$

Equação 10.10

Como se verifica facilmente nas Equação 10.8 e Equação 10.9 fazendo $\sigma_{max}=\sigma_{med}=\sigma_{min}=\sigma$.

10.2 MATERIAIS DÚCTEIS

Material dúctil possui a característica de conservar a sua tensão mecânica para além do seu limite elástico, ao ser distendido, suportando alterações na forma sem quebrar. Essa deformação chama-se plástica e é irreversível. Os metais são materiais extremamente dúcteis, podendo ser estriados em fios, ou laminados em finas folhas, sem quebrarem.

Essa conservação da tensão é evidenciada quando se atinge o patamar de escoamento durante um teste mecânico, atingindo a ruptura após sofrer um grande alongamento (Figura 10.7), como o caso, por exemplo, do aço carbono. Outros exemplos de matérias dúcteis são o cobre, ouro e o alumínio.

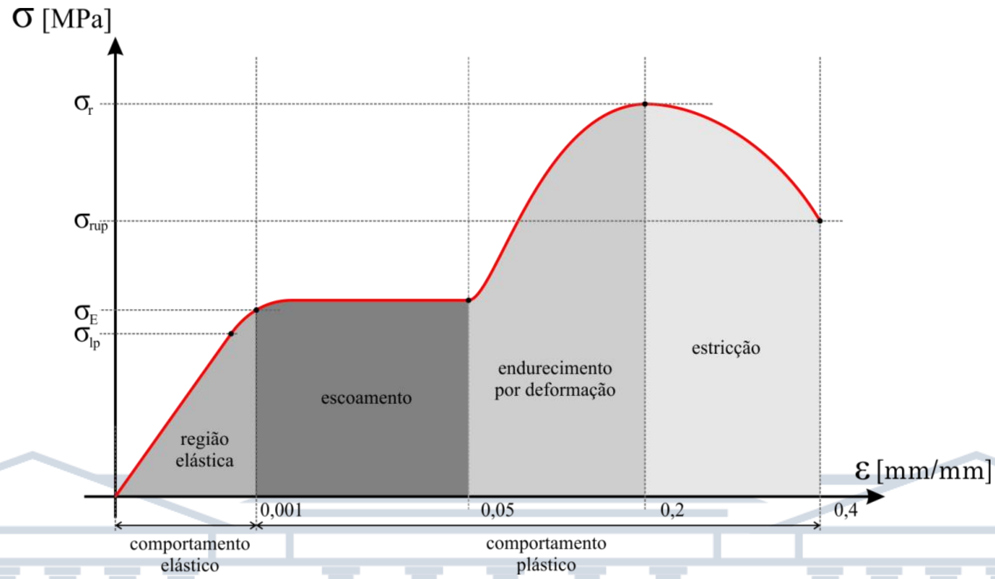


Figura 10.7: Gráfico tensão x deformação para um material dúctil.

10.2.1 TEORIA DA TENSÃO CISALHANTE MÁXIMA – TEORIA DE TRESCA

Quando uma chapa de um material dúctil, como aço carbono, é ensaiada à tração, observa-se que o mecanismo que é realmente responsável pelo escoamento é o deslizamento. Ou seja, cisalhamento ao longo dos planos de tensão cisalhante máxima, a 45º em relação ao eixo do elemento. O escoamento inicial está associado ao aparecimento da primeira linha de deslizamento na superfície do corpo de prova e, conforme a deformação aumenta mais linhas de deslizamento aparecem até que todo o corpo de prova tenha escoado. Se esse deslizamento for considerado o mecanismo real de falha, então a tensão que melhor caracteriza esta falha é a tensão cisalhante nos planos de deslizamento.

A Figura 10.8 mostra o círculo de Mohr de tensão para este estado de tensão uniaxial, indicando que a tensão cisalhante nos planos de deslizamento tem um valor de $\sigma_e/2$. Desse modo, se for definido que em um material dúctil sob qualquer estado de tensão (uniaxial, biaxial ou triaxial) a falha ocorre quando a tensão cisalhante em qualquer plano atinge o valor de $\sigma_e/2$, então o critério de falha para a teoria da tensão cisalhante máxima pode ser enunciado como:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2}$$ Equação 10.11

onde σ_e é o limite de escoamento determinado por um ensaio de tração simples.

Figura 10.8: Tensões principais e tensões cisalhantes máximas, ensaio de tração uniaxial.

Sabendo que a equação

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$ Equação 10.12

Leva a:

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_e \qquad \text{Equação 10.13}$$

Sendo σ_{max} e σ_{min} as tensões principais no estado plano. O critério de falha da tensão cisalhante máxima pode ser enunciado em termos dessas tensões principais de acordo com:

$$\begin{aligned} |\sigma_{max}| &= \sigma_e \quad se \quad |\sigma_{max}| \geq |\sigma_{min}| \\ |\sigma_{min}| &= \sigma_e \quad se \quad |\sigma_{min}| \geq |\sigma_{max}| \end{aligned} \qquad \text{Equação 10.14}$$

Se σ_{max} e σ_{min} tiverem o mesmo sinal, e :

$$|\sigma_{max} - \sigma_{min}| = \sigma_e \qquad \text{Equação 10.15}$$

Se σ_{max} e σ_{min} tiverem sinal oposto.

As equações acima podem ser representadas graficamente como:

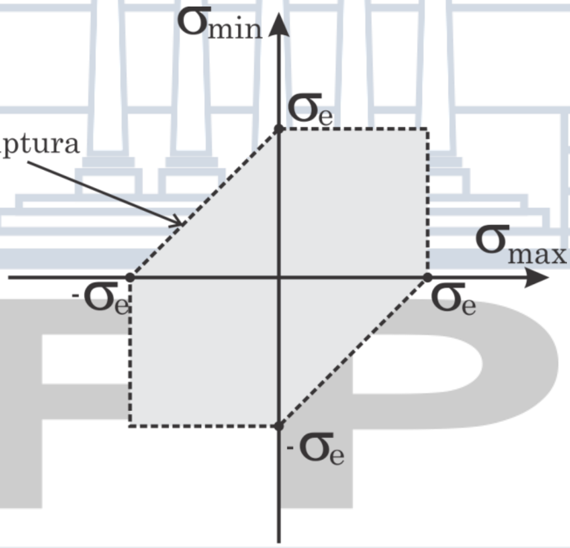
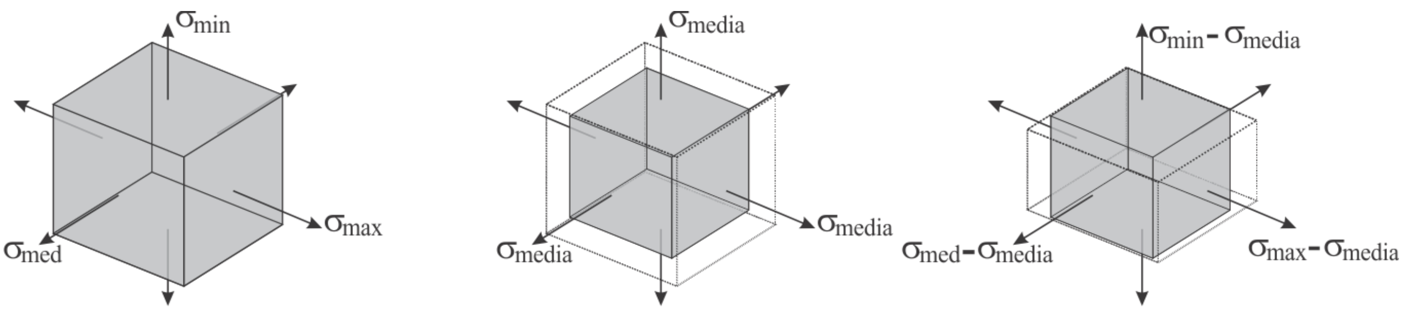


Figura 10.9: Hexágono de falha para a teoria da tensão cisalhante máxima (estado plano).

Em um elemento sob tensão plana, o estado de tensão em todos os pontos do corpo pode ser representado por um ponto de tensão (σ_{max}, σ_{min}) no plano σ_{max} - σ_{min}, como indicado na Figura 10.9. Se o estado de tensão para qualquer ponto no corpo corresponde a um ponto de tensão que se situe fora do hexágono da figura ou em sua fronteira, diz-se que ocorreu a falha, de acordo com a teoria da tensão cisalhante máxima.

10.2.2 TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO MÁXIMA – TEORIA DE VON MISES

Embora a teoria da tensão cisalhante máxima forneça uma hipótese razoável para o escoamento em materiais dúcteis, a teoria da energia de distorção máxima se correlaciona melhor com os dados experimentais e, desse modo, é geralmente preferida. Nessa teoria, considera-se que o escoamento ocorre quando a energia associada à mudança de forma de um corpo, submetido a um carregamento multiaxial, for igual à energia de distorção em um corpo de prova de tração, quando o escoamento ocorre na tensão de escoamento uniaxial, σ_e. Considere a energia de deformação armazenada em um elemento de volume, como mostrado na Figura 10.10.



(a) (b) (c)

Figura 10.10: Estado triaxial de tensões (a), variação de volume (b) e distorção angular (c).

A densidade de energia de deformação devida ao carregamento multiaxial é dada pela Equação 10.16, que pode ser escrita, usando os três eixos principais, na forma,

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{max}\varepsilon_{max} + \sigma_{med}\varepsilon_{med} + \sigma_{min}\varepsilon_{min}) \qquad \text{Equação 10.16}$$

Combinando-se esta equação com a Lei de Hooke, obtém-se,

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_{max}{}^2 + \sigma_{med}{}^2 + \sigma_{min}{}^2 - 2\nu(\sigma_{max}\sigma_{med} + \sigma_{med}\sigma_{min} + \sigma_{max}\sigma_{min})] \qquad \text{Equação 10.17}$$

Uma parcela desta energia de deformação pode estar associada à variação de volume do elemento e o restante da energia de deformação está associado à variação de forma, ou seja, à distorção.

A variação de volume é produzida pela média das tensões da Equação 10.18, como ilustrado na Figura 10.10b.

$$\sigma_{media} = \frac{1}{3}[\sigma_{max} + \sigma_{med} + \sigma_{min}] \qquad \text{Equação 10.18}$$

As tensões resultantes mostradas na Figura 10.10c produzem distorção sem qualquer variação no volume. Ensaios mostraram que materiais não escoam quando estão submetidos a pressões hidrostáticas (tensões iguais em todas as direções – estado de tensão hidrostático - Figura 10.10b) de valores extremamente altos. Assim, postulou-se que as tensões que realmente causam escoamento são as tensões que produzem distorção. Esta hipótese constitui o critério de escoamento (de falha) da energia de distorção máxima, que enuncia: “o escoamento de um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume iguala ou excede a energia de distorção por unidade de volume quando o mesmo material escoa em um ensaio de tração simples”.

Quando as tensões da Figura 10.10c, que causam distorção, são substituídas na Equação 10.17, obtendo-se a seguinte expressão para a densidade de energia de distorção:

$$U_d = \frac{1}{12G}[(\sigma_{max} - \sigma_{med})^2 + (\sigma_{med} - \sigma_{min})^2 + (\sigma_{max} - \sigma_{min})^2] \qquad \text{Equação 10.19}$$

A densidade de energia de distorção em um corpo de prova de tração na tensão limite de escoamento, σ_e, é:

$$(U_d)_e = \frac{1}{6G}\sigma_e^2$$ Equação 10.20

pois $\sigma_{max} = \sigma_e$, $\sigma_{med} = \sigma$ e $\sigma_{min} = 0$. Deste modo, o escoamento ocorre quando a energia de distorção para um carregamento geral, dado pela Equação 10.19, iguala ou excede o valor de $(U_d)_e$ Equação 10.20. Assim, o critério de falha da energia de distorção máxima pode ser enunciado em termos das três tensões principais como:

$$\frac{1}{2}[(\sigma_{max} - \sigma_{med})^2 + (\sigma_{med} - \sigma_{min})^2 + (\sigma_{max} - \sigma_{min})^2] = \sigma_e^2$$ Equação 10.21

Em termos das tensões normais e das tensões cisalhantes em três planos arbitrários mutuamente ortogonais, pode-se mostrar que o critério de falha da energia de distorção máxima tem a seguinte forma

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right] = \sigma_e^2$$ Equação 10.22

No caso de tensão plana, as expressões correspondentes para o critério de falha da energia de distorção máxima podem ser facilmente obtidas das Equação 10.21 e Equação 10.22, substituindo-se $\sigma_{med} = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Em termos das tensões principais tem-se, então:

$${\sigma_{max}}^2 + {\sigma_{min}}^2 - \sigma_{max}\sigma_{min} = \sigma_e^2$$ Equação 10.23

Essa é a equação de uma elipse no plano σ_{max} - σ_{min}, como mostrado na Figura 10.11. Com o propósito de comparação, o hexágono de falha para a teoria de escoamento da tensão cisalhante máxima também está mostrado, em linhas tracejadas. Nos seis vértices do hexágono, as duas teorias de falha coincidem, ou seja, ambas as teorias predizem que o escoamento ocorrerá se o estado de tensão (plano) em um ponto corresponde a qualquer um destes seis estados de tensão. Por outro lado, a teoria da tensão cisalhante máxima dá uma estimativa mais conservadora (ou seja, um valor menor) para as tensões necessárias para produzir escoamento, pois o hexágono se situa sobre ou dentro da elipse.

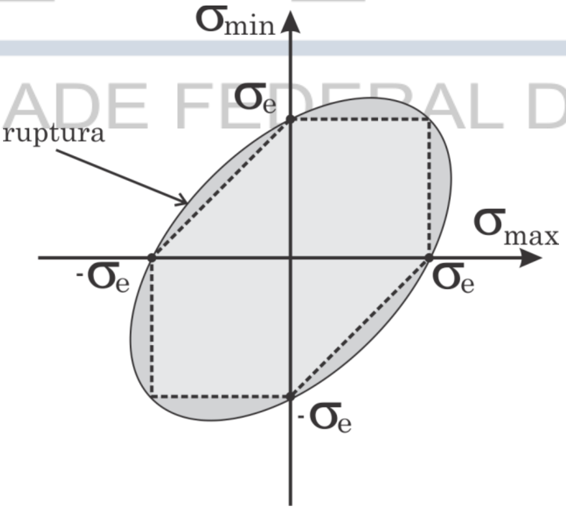


Figura 10.11: Elipse de falha para a teoria da energia de distorção máxima (estado plano).

Um modo conveniente de aplicar a teoria da energia de distorção máxima é tirar a raiz quadrada dos termos do lado esquerdo da Equação 10.21 ou Equação 10.22 para obter uma quantidade equivalente de tensão que é chamada de tensão equivalente de Von Mises. Qualquer uma das duas equações a seguir pode ser usada para calcular a tensão equivalente de Von Mises, σ_{VM}:

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sigma_{max} - \sigma_{med})^2 + (\sigma_{med} - \sigma_{min})^2 + (\sigma_{max} - \sigma_{min})^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Equação 10.24}$$

Ou

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{Equação 10.25}$$

Para o caso de tensão plana, as expressões correspondentes para a tensão equivalente de Von Mises podem ser facilmente obtidas das Equação 10.24 Equação 10.25 colocando-se $\sigma_{med} = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Comparando-se o valor da tensão de Von Mises em qualquer ponto, com o valor da tensão de escoamento em tração, σ_e, pode-se determinar se o escoamento ocorre de acordo com a teoria de falha da energia de distorção máxima.