

4

FLEXÃO SIMPLES ARMADURA LONGITUDINAL DE VIGA

4.1 Introdução

Uma viga reta, desde que não possua carregamentos horizontais ou inclinados, será solicitada por momentos fletores e forças cortantes, como mostrado na Figura 4.1.

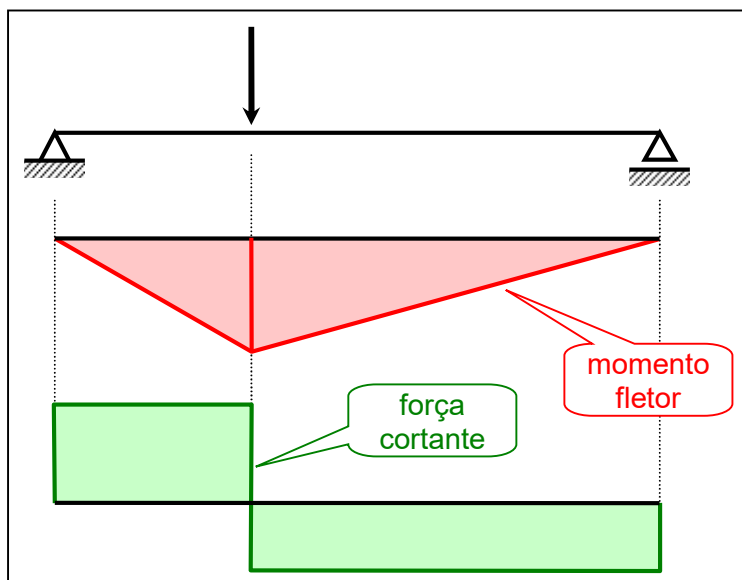


Figura 4.1 - Solicitações em viga

Nas vigas de concreto armado, os momentos fletores e as forças cortantes são responsáveis pela existência de dois tipos de armadura (Figura 4.2):

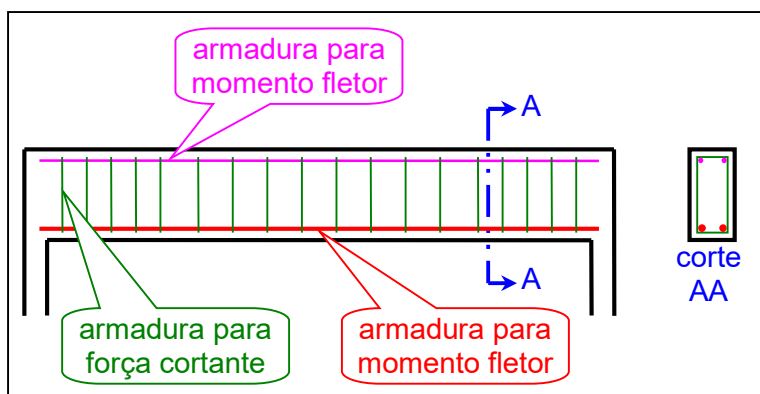


Figura 4.2 - Armaduras de viga de concreto armado

- longitudinal, para resistir aos momentos fletores; e
- transversal, para resistir às forças cortantes.

Neste capítulo só serão estudadas as armaduras longitudinais, ou seja, as armaduras necessárias para resistir aos momentos fletores.

Segundo a ABNT NBR 6118 - 18.3.1, as vigas ficam caracterizadas quando:

- $\ell/h \geq 2$ para vigas isostáticas; e
- $\ell/h \geq 3$ para vigas contínuas.

onde:

- ℓ é o comprimento do vão teórico (ou o dobro do comprimento teórico, no caso de balanço); e
- h é a altura total da viga.

Vigas com relações ℓ/h menores devem ser tratadas como vigas-parede.

4.2 Vãos efetivos de vigas

Segundo a ABNT NBR 6118 - 14.6.2.4, o vão efetivo de vigas (Figura 4.3) pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\ell_{ef} = \ell_0 + a_1 + a_2$$

Equação 4.1

com:

$$a_1 = \min \begin{bmatrix} 0,5t_1 \\ 0,3h \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \min \begin{bmatrix} 0,5t_2 \\ 0,3h \end{bmatrix}$$

onde:

- ℓ_{ef} vão efetivo da viga;
- ℓ_0 distância entre faces de dois apoios consecutivos;
- t largura do apoio paralelo ao vão da viga analisada; e
- h altura da viga.

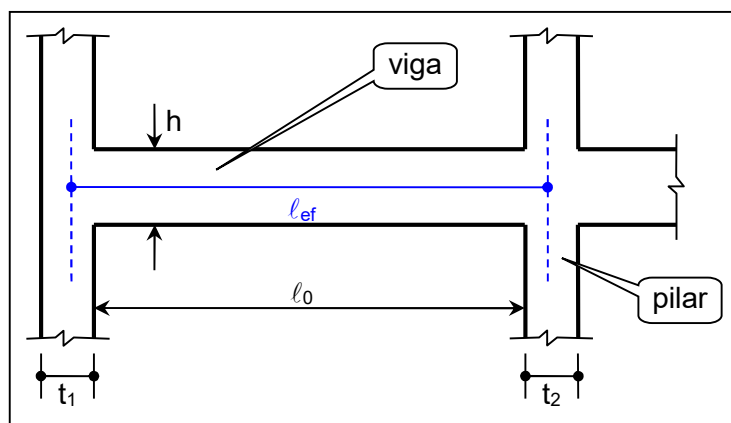


Figura 4.3 - Vão efetivo de viga

4.3 Estado-limite último¹

O dimensionamento das armaduras longitudinais deve conduzir a um esforço resistente (M_{Rd}) igual ou superior ao esforço solicitante (M_{Sd}) determinado na análise estrutural.

4.3.1 Hipóteses básicas

Na análise dos esforços resistentes de uma seção de viga, devem ser consideradas as seguintes hipóteses básicas:

- a. as seções transversais se mantêm planas após a deformação;
- b. a deformação das barras passivas aderentes, em tração ou compressão, deve ser a mesma do concreto em seu contorno;
- c. as tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas;
- d. a distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo, com definido em 1.5.8 (página 1-5), com tensão de pico igual a $0,85 f_{cd}$, com f_{cd} definido em 3.3.2.3 (página 3-27), podendo este diagrama ser substituído pelo retângulo (Figura 4.4) de profundidade $y = \lambda x$, onde o valor do parâmetro λ pode ser tomado igual a:

¹ Como apresentadas na ABNT NBR 6118 - 17.2.2.

$$\lambda = \begin{cases} 0,8 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle \\ 0,8 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{400} \right) & \langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle \end{cases}$$

Equação 4.2

e onde a tensão constante atuante até a profundidade y pode ser tomada como sendo $(\sigma_c = \alpha_c f_{cd})^2$, de tal forma que:

$$\alpha_c = \begin{cases} 0,85 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle \\ 0,85 \left(1 - \frac{f_{ck} - 50}{200} \right) & \langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle \end{cases}$$

Equação 4.3

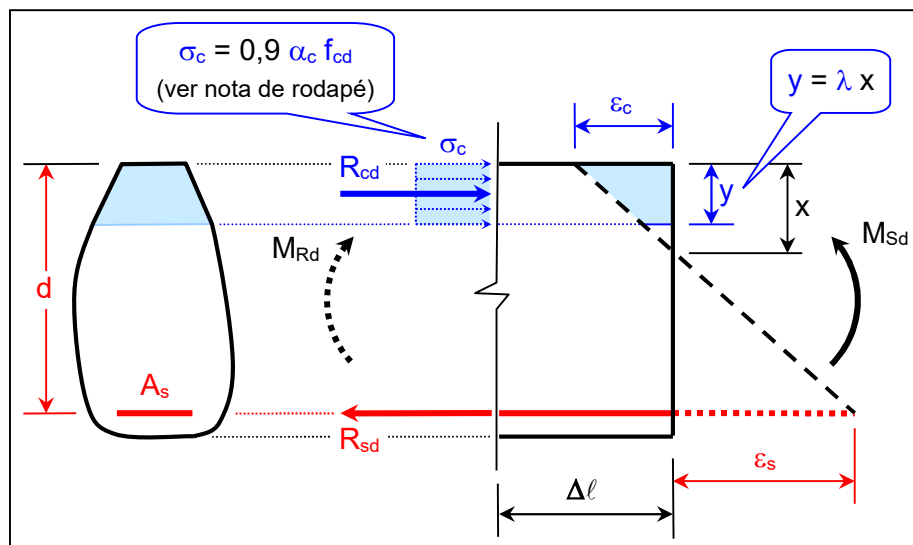


Figura 4.4 - Distribuição de tensões no concreto comprimido

- e. a tensão nas armaduras deve ser obtida a partir dos diagramas tensão-deformação, (Figura 4.5) com valores de cálculo definidos em 3.3.2.4 (página 3-29);

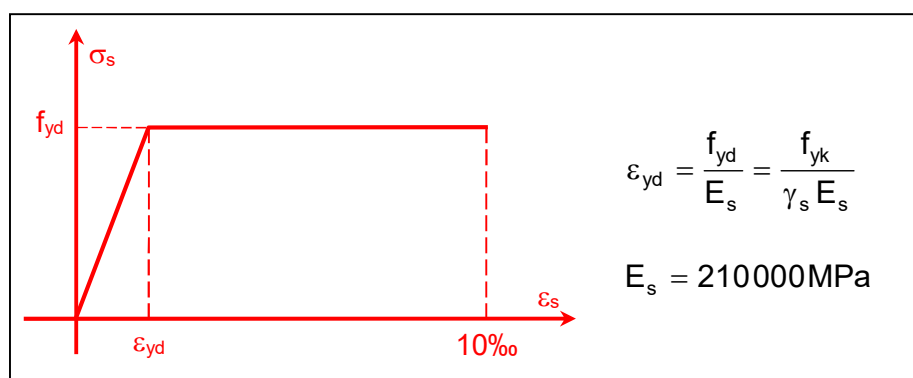


Figura 4.5 - Diagrama tensão-deformação do aço

- f. o estado-limite é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios definidos na Figura 4.6.

² No caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida, a tensão no concreto deve ser tomada como sendo $\sigma_c = \alpha_c f_{cd}$. Caso contrário, como na Figura 4.4, $\sigma_c = 0,9 \alpha_c f_{cd}$.

4.3.2 Domínios 2, 3 e 4

Figura 4.7 - Domínios possíveis para vigas de concreto armado

Da Figura 4.7, tem-se:

- no domínio 2 [$0,000 \leq \beta_x \leq \beta_{x,23}$] (seção subarmada),
 - o concreto não chegou ao seu encurtamento limite (ϵ_{cu}), possuindo, ainda, certa reserva de capacidade resistente;
 - o aço chegou ao seu alongamento máximo (10‰), tendo esgotado sua capacidade resistente; e
 - a viga, se submetida a um carregamento superior ao de projeto, deve apresentar um quadro de fissuração intenso devido ao excessivo alongamento da armadura (e do concreto adjacente).
- no domínio 3 [$\beta_{x,23} \leq \beta_x \leq \beta_{x,34}$] (seção subarmada),
 - o concreto chegou ao seu encurtamento limite (ϵ_{cu}), tendo esgotado sua capacidade resistente;
 - o aço tem seu alongamento compreendido entre ϵ_{yd} e 10‰, possuindo, ainda, uma boa reserva de capacidade resistente; e
 - a viga, se submetida a um carregamento superior ao de projeto, deve apresentar um quadro de fissuração expressivo devido ao fato da armadura (e o concreto adjacente) apresentar alongamento considerável.
- no domínio 4 [$\beta_{x,34} \leq \beta_x \leq 1,000$] (seção superarmada),
 - o concreto pode estar próximo de ultrapassar seu encurtamento limite (ϵ_{cu}), tendo esgotado, por inteiro, sua capacidade resistente;
 - o aço tem seu alongamento compreendido entre 0‰ e ϵ_{yd} , possuindo uma grande reserva de capacidade resistente; e
 - a viga, se submetida a um carregamento superior ao de projeto, não deve apresentar um quadro de fissuração tão perceptível quanto aos dos domínios 2 e 3 devido ao pequeno alongamento da armadura (e do concreto adjacente).

As vigas, quando dimensionadas no domínio 4 (superarmadas), podem, em caso de uma eventual sobrecarga imprevista, ser conduzidas a uma ruptura frágil, sem aviso prévio, pois o concreto rompe bruscamente antes da armadura esgotar sua capacidade resistente. As vigas dimensionadas nos domínios 2 e 3 (subarmadas) têm, devido a condições mais adequadas da posição da linha neutra, garantida boas condições de ductilidade, sendo conduzidas, para uma condição adversa de carregamento, a rupturas com aviso prévio, pois a armadura escoar antes do rompimento do concreto mostrando um quadro visível de deterioração da viga.

O comportamento de viga, se subarmada ou superarmada³, fica definido pela passagem do domínio 3 para o domínio 4 (Figura 4.7), que corresponde à reta $\epsilon_{cu} - \epsilon_{yd}$.

Considerando um estado de deformação qualquer, dentro dos domínios 2, 3 ou 4 (Figura 4.8), tem-se:

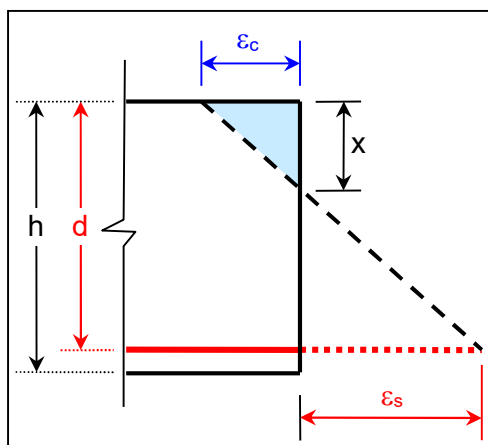


Figura 4.8 - Deformações em seção longitudinal de vigas

$$\beta_x = \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s}$$

Equação 4.4

³ As vigas superarmadas possuem, em geral, pouca altura e excessiva armadura (daí o super, no sentido de excessiva quantidade de armadura), ao passo que as vigas subarmadas têm uma distribuição mais equilibrada de materiais (daí o sub, no sentido de menos quantidade de armadura).

Para ε_c igual a ε_{cu} e ε_s igual a 10‰, que representa a passagem do domínio 2 para o 3 (Figura 4.7), tem-se:

$$\beta_{x,23} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + 10\text{‰}} \quad \text{Equação 4.5}$$

Tendo em vista que a ABNT NBR 6118 estabelece valores de ε_{cu} em função da classe do concreto, como mostrado em 1.5.8 (página 1-5), o valor de $\beta_{x,23}$, para diferentes tipos de concreto, pode ser dado por:

$$\beta_{x,23} = \begin{cases} \frac{3,5\text{‰}}{3,5\text{‰} + 10\text{‰}} & \langle f_{ck} \leq 50\text{MPa} \rangle \\ \frac{2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4}{2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 + 10\text{‰}} & \langle f_{ck} > 50\text{MPa} \rangle \end{cases} \quad \text{Equação 4.6}$$

Para diferentes tipos de concreto, a Tabela 4.1 mostra os valores de $\beta_{x,23}$ calculados pela Equação 4.6.

$\beta_{x,23}$					
$\leq C50$	C55	C60	C70	C80	C90
0,259	0,238	0,224	0,210	0,207	0,206

Tabela 4.1 - Valores de $\beta_{x,23}$ para diferentes concretos

Para ε_c igual a ε_{cu} e ε_s igual a ε_{yd} , que representa a passagem do domínio 3 para o 4 (Figura 4.7), tem-se:

$$\beta_{x,34} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \quad \text{Equação 4.7}$$

Tendo em vista que a ABNT NBR 6118 estabelece valores de ε_{cu} em função da classe do concreto, como mostrado em 1.5.8 (página 1-5), e ε_{yd} é dependente da categoria do aço, como apresentado na Figura 4.5 (página 4-3), o valor de $\beta_{x,34}$, para diferentes tipos de concreto e aço, pode ser dado por:

$$\beta_{x,34} = \begin{cases} \frac{3,5\text{‰}}{3,5\text{‰} + \left(\frac{f_{yk}}{\gamma_s \times 210} \right) \text{‰}} & \langle f_{ck} \leq 50\text{MPa} \rangle \\ \frac{2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4}{2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 + \left(\frac{f_{yk}}{\gamma_s \times 210} \right) \text{‰}} & \langle f_{ck} > 50\text{MPa} \rangle \end{cases} \quad \text{Equação 4.8}$$

Para diferentes tipos de concreto e aço, a Tabela 4.2 mostra os valores de $\beta_{x,34}$ calculados pela Equação 4.8, onde γ_s foi considerado como sendo igual a 1,15.

	$\beta_{x,34}$					
	$\leq C50$	C55	C60	C70	C80	C90
CA-25	0,772	0,751	0,736	0,720	0,716	0,715
CA-50	0,628	0,602	0,582	0,562	0,557	0,557
CA-60	0,585	0,557	0,537	0,517	0,512	0,511

Tabela 4.2 - Valores de $\beta_{x,34}$ para diferentes concretos e aços - $\gamma_s = 1,15$

4.3.3 Recomendações da ABNT NBR 6118

ABNT NBR 6118 - 16.2.3:

“Em relação aos ELU, além de se garantir a segurança adequada, isto é, uma probabilidade suficientemente pequena de ruína, é necessário garantir uma boa utilidade, de forma que uma eventual ruína ocorra de forma suficientemente avisada, alertando os usuários.”

ABNT NBR 6118 - 17.2.3:

“Nas vigas é necessário garantir boas condições de utilidade respeitando os limites da posição da linha neutra (x/d) dados em 14.6.4.3, sendo adotada, se necessário, armadura de compressão.

A introdução da armadura de compressão para garantir o atendimento de valores menores da posição da linha neutra (x), que estejam nos domínios 2 ou 3, não conduz a elementos estruturais com ruptura frágil (usualmente chamados de superarmados). A ruptura frágil está associada a posições da linha neutra no domínio 4, com ou sem armadura de compressão.”

ABNT NBR 6118 - 14.6.4.3:

“A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for x/d , tanto maior será essa capacidade.

Para proporcionar o adequado comportamento dútil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

$x/d \leq 0,45$ para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa; e

$x/d \leq 0,35$ para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$.

Esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como, por exemplo, os que produzem confinamento nessas regiões.”

Desta forma, de modo a garantir as condições de utilidade de elementos estruturais solicitados por momento fletor, a linha neutra deve ser posicionada nos domínios 2 ou 3, respeitados os limites estabelecidos na ABNT NBR 6118 - 14.6.4.3, como mostrado na Figura 4.9.

Da mesma forma que a linha neutra pode ser representada de modo adimensional, através do parâmetro β_x , as tensões de tração na armadura também podem ser representadas de modo adimensional, através de:

$$\beta_s = \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$$

Equação 4.9

Desta forma, na Figura 4.9, o eixo das tensões está representado de forma adimensional, através do parâmetro β_s .

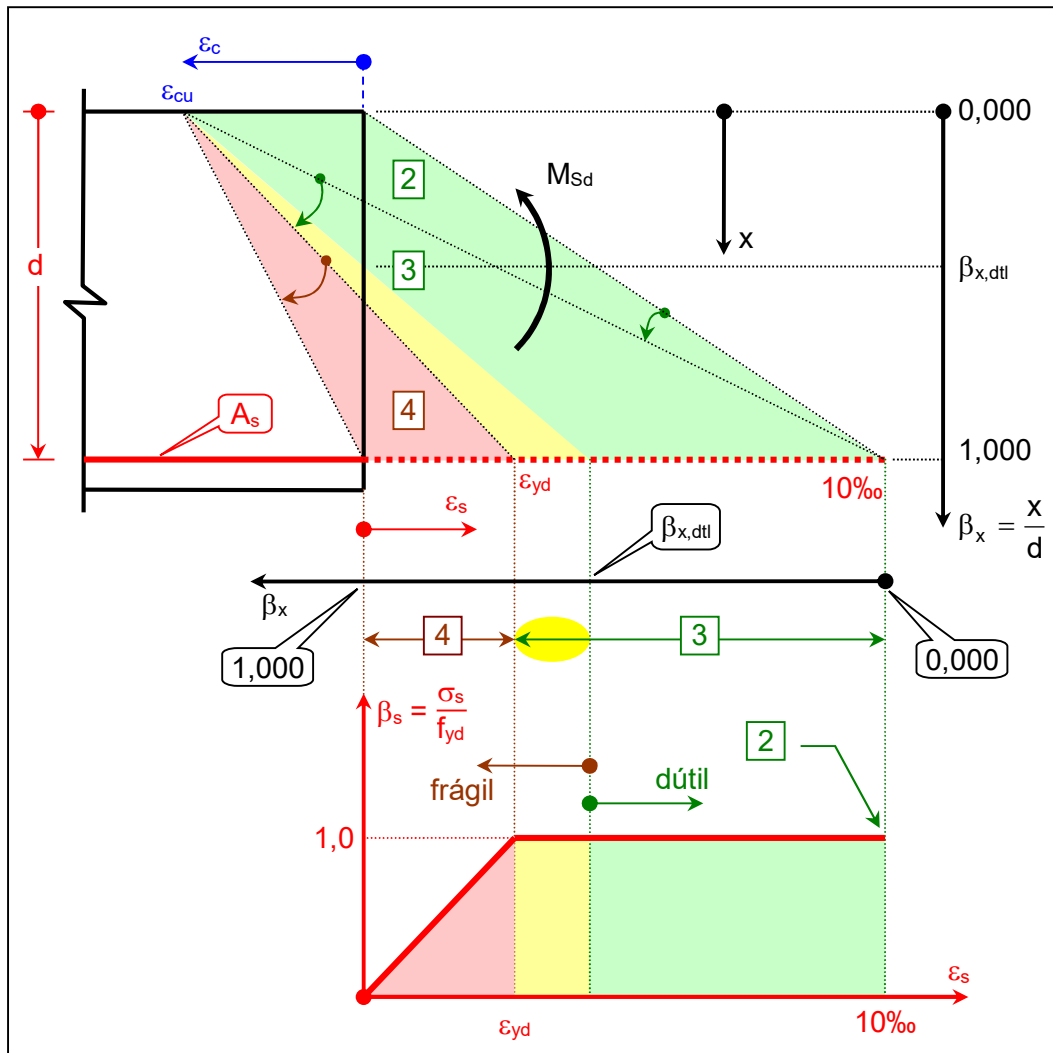


Figura 4.9 - Condições de ductilidade da ABNT NBR 6118

A obediência à ABNT NBR 6118 - 14.6.4.3, que estabelece o adequado comportamento dútil de vigas e lajes, pode ser representada por:

$$\beta_{x,dtl} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle \end{cases}$$

Equação 4.10

4.4 Variáveis adimensionais - ELU

4.4.1 Elementos geométricos de seções retangulares

Seja a Figura 4.10 onde são mostrados, dentre outros:

- os esforços resistentes de cálculo (R_{cd} e R_{sd});
- a posição da linha neutra (x);
- a altura do retângulo de tensões de compressão (y);
- a distância entre os esforços resistentes de cálculo (z); e
- a altura útil da viga (d).

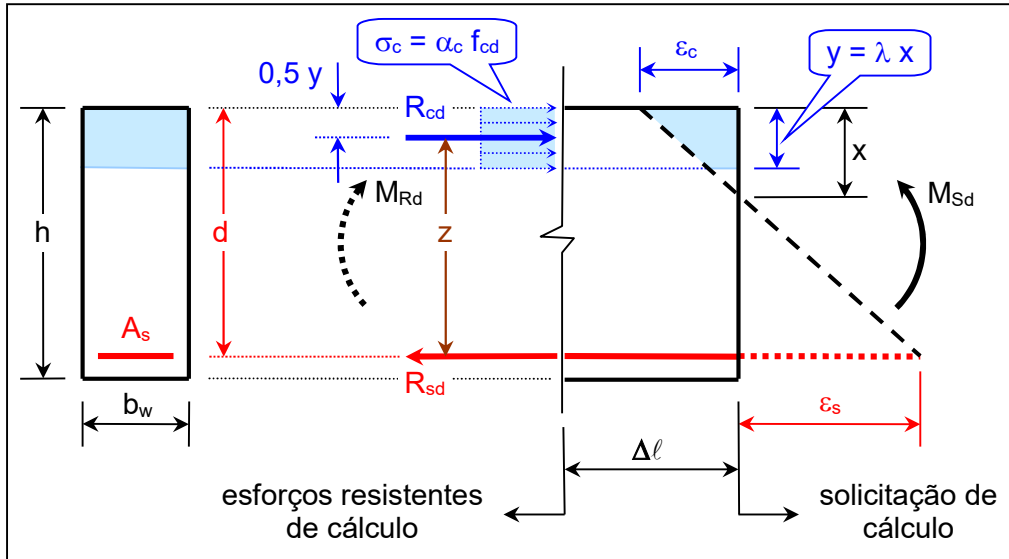


Figura 4.10 - Solicitação e esforços resistentes em vigas de concreto armado

Da Figura 4.10, tem-se:

- posição da linha neutra, como estabelecida pela Equação 4.4 (página 4-5)

$$\beta_x = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$$

- altura do retângulo de tensões σ_c

$$y = \lambda x = \lambda d \left(\frac{x}{d} \right)$$

$$\beta_y = \frac{y}{d} = \lambda \beta_x$$

- braço de alavanca entre os esforços resistentes de cálculo R_{cd} e R_{sd}

$$z = d - 0,5y$$

$$z = d - 0,5(\lambda x)$$

$$z = d \left(1 - 0,5\lambda \frac{x}{d} \right)$$

$$\beta_z = \frac{z}{d} = 1 - 0,5\lambda \beta_x$$

Agrupando todas as variáveis geométricas β , e criando a variável auxiliar β_c , tem-se:

$\beta_x = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$	⟨posição da linha neutra⟩
$\beta_y = \frac{y}{d} = \lambda \beta_x$	⟨altura do retângulo de tensões σ_c ⟩
$\beta_z = \frac{z}{d} = 1 - 0,5\lambda \beta_x$	⟨braço de alavanca entre R_{cd} e R_{sd} ⟩
$\beta_c = \lambda \alpha_c \beta_x \beta_z = \lambda \alpha_c \beta_x (1 - 0,5\lambda \beta_x)$	⟨variável auxiliar⟩

Equação 4.11

A Equação 4.11 mostra que as variáveis adimensionais β_y , β_z e β_c são funções diretas de β_x , λ e α_c . Como mostrado nas Equação 4.2 e Equação 4.3 (página 4-3), as variáveis λ e α_c são funções diretas da classe do concreto através de f_{ck} . Desta forma, da Equação 4.11 resultam:

- concreto classe igual ou inferior a C50 ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$)

$$\beta_x = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$$

$$\beta_y = \frac{y}{d} = 0,8\beta_x$$

$$\beta_z = \frac{z}{d} = 1 - 0,4\beta_x$$

$$\beta_c = \lambda \alpha_c \beta_x \beta_z = 0,68\beta_x \beta_z$$

$$\langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

Equação 4.12

- concreto classe superior a C50 ($f_{ck} > 50 \text{ MPa}$)

$$\beta_x = \frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$$

$$\beta_y = \frac{y}{d} = \left(0,8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \beta_x$$

$$\beta_z = \frac{z}{d} = 1 - \left[0,5 \left(0,8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \right] \beta_x$$

$$\beta_c = \lambda \alpha_c \beta_x \beta_z = \left(0,8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \left[0,85 \left(1 - \frac{f_{ck} - 50}{200} \right) \right] \beta_x \beta_z$$

$$\langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle$$

Equação 4.13

Desta forma, uma vez conhecida a posição da linha neutra (β_x), todos os demais elementos geométricos (β_y , β_z e β_c) ficam igualmente definidos, para cada classe de concreto. A Equação 4.12 e a Equação 4.13 permitem agrupar os valores de β como mostrado na Tabela 4.3.

≤ C50				C90			
β_x	β_y	β_z	β_c	β_x	β_y	β_z	β_c
0,100	0,080	0,960	0,065	0,100	0,070	0,965	0,046
0,200	0,160	0,920	0,125	0,200	0,140	0,930	0,089
0,250	0,200	0,900	0,153	0,250	0,175	0,913	0,109
0,300	0,240	0,880	0,180	0,300	0,210	0,895	0,128
0,350	0,280	0,860	0,205	0,350	0,245	0,878	0,146
0,450	0,360	0,820	0,251	0,450	0,315	0,843	0,180

Tabela 4.3 - Valores de β_y , β_z , e β_c como função da classe do concreto e β_x

4.4.2 Diagrama adimensional tensão-deformação do aço

Considerando o diagrama tensão-deformação do aço como apresentado na Figura 4.5 (página 4-3), e, agora, considerando também as deformações de encurtamento (compressão), chega-se a Figura 4.11. Nesta Figura, assim como na Figura 4.9 (página 4-8), optou-se por apresentar o diagrama de forma adimensional, com a introdução dos valores de β_s e β'_s .

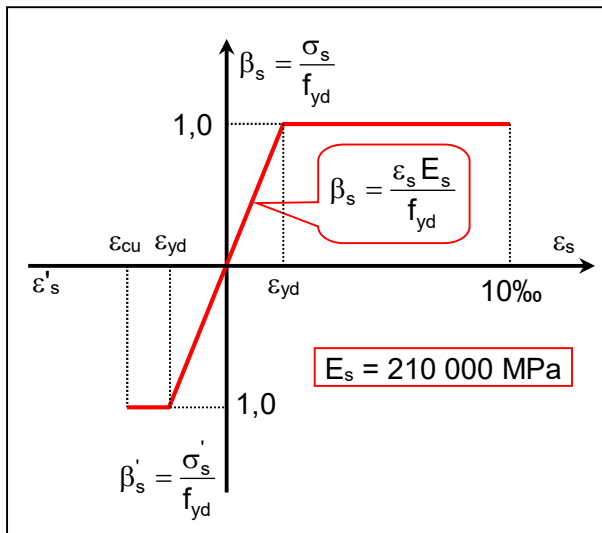


Figura 4.11 - Diagrama adimensional tensão-deformação do aço

Os valores de β_s e β'_s , no trecho inclinado, são dados por:

$$\beta_s = \frac{\sigma_s}{f_{yd}} = \frac{\epsilon_s E_s}{f_{yd}} = \epsilon_s \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \leq 1,0$$

$$\beta'_s = \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} = \frac{\epsilon'_s E_s}{f_{yd}} = \epsilon'_s \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \leq 1,0$$

Equação 4.14

Seja a Figura 4.12 onde são mostrados, dentre outros:

- a posição da linha neutra (x);
- a altura útil da viga (d);
- a posição da armadura comprimida (d');
- o encurtamento da fibra de concreto mais comprimida (ϵ_c);
- o encurtamento da armadura comprimida (ϵ'_s); e
- o alongamento da armadura tracionada (ϵ_s).

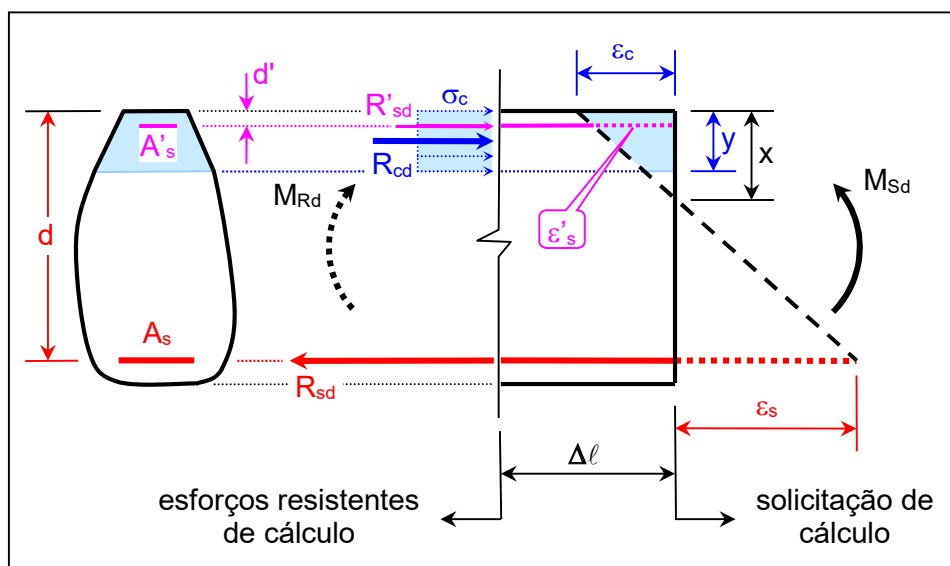


Figura 4.12 - Alongamento e encurtamento da armadura

Os valores de ϵ_s e ϵ'_s , necessários para a determinação de β_s e β'_s pela Equação 4.14, só são possíveis se forem conhecidos os valores de x , d , d' e ϵ_c , como mostrados na Figura 4.12. Sendo ϵ_c dependente dos domínios da ABNT NBR 6118, a determinação de β_s e β'_s fica, também, dependente destes domínios.

4.4.2.1 Armadura tracionada

4.4.2.1.1 Domínios 2 e 3

Considerando a Figura 4.7 (página 4-4) e a Figura 4.9 (página 4-8), observa-se, para os domínios 2 e 3 ($0,000 \leq \beta_x \leq \beta_{x,34}$), que o valor de β_s é sempre igual a 1,0, como apresentado na Figura 4.13. Observa-se, também, na referida Figura que uma viga subarmada pode ser caracterizada com a imposição de β_s igual a 1,0.

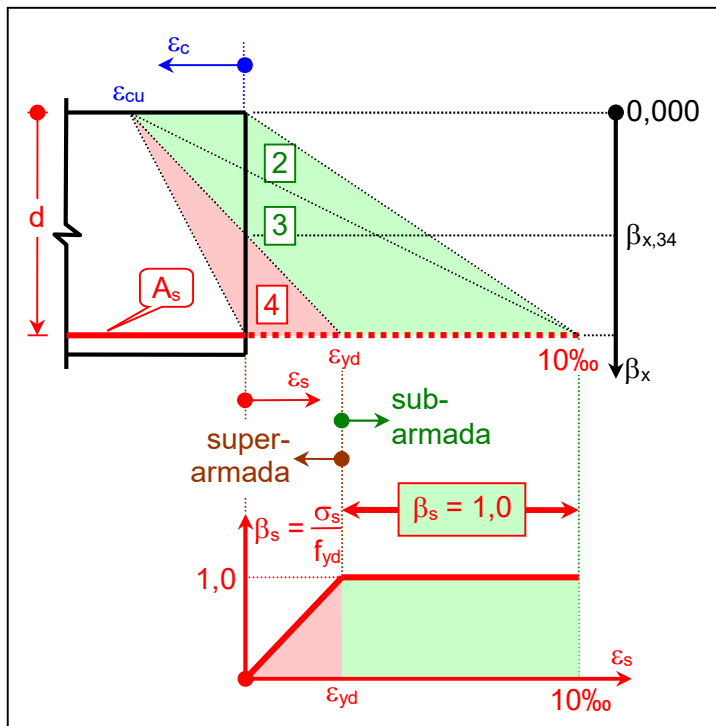


Figura 4.13 - Domínios 2 e 3 - ($\beta_s = 1,0$)

Desta forma, para os domínios 2 e 3, o valor de β_s , dado pela Equação 4.14, corresponde a:

$$\beta_s = 1,000 \quad \langle 0,000 \leq \beta_x \leq \beta_{x,34} \rangle \quad \text{Equação 4.15}$$

4.4.2.1.2 Domínio 4

Da Figura 4.13, pode ser observado que o valor de β_s é menor que 1,0 somente no domínio 4 ($\beta_{x,34} \leq \beta_x \leq 1,000$). Por outro lado, no domínio 4, o encurtamento do concreto corresponde ao valor último, ou seja, ϵ_{cu} (Figura 4.14).

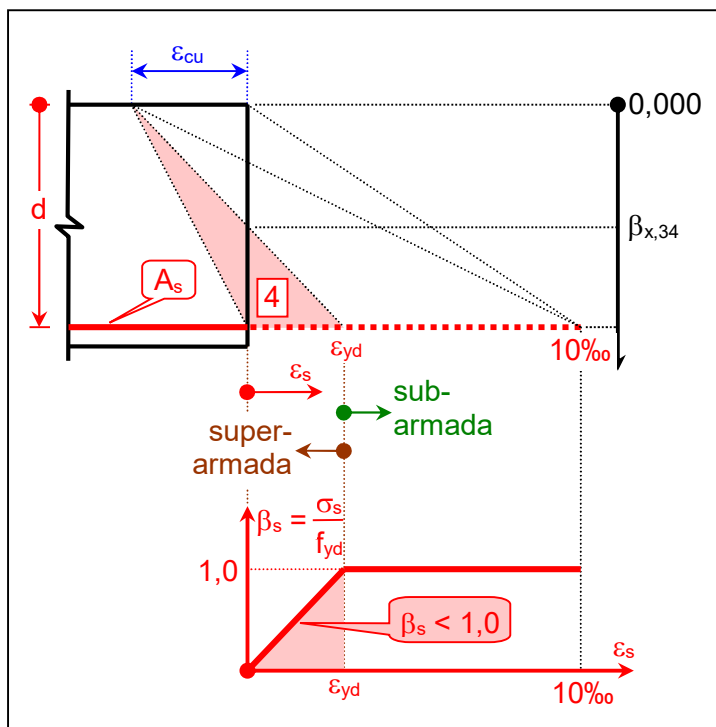


Figura 4.14 - Domínio 4 - ($\beta_s < 1,0$)

Da Figura 4.12 (página 4-11), tem-se:

$$\varepsilon_s = \left(\frac{d-x}{x} \right) \varepsilon_c = \left(\frac{1-\frac{x}{d}}{\frac{x}{d}} \right) \varepsilon_{cu} \quad (\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} \text{ no domínio 4})$$

$$\beta_x = \frac{x}{d} \quad (\text{Equação 4.4, página 4-5})$$

$$\varepsilon_s = \left(\frac{1-\beta_x}{\beta_x} \right) \varepsilon_{cu}$$

$$\beta_s = \varepsilon_s \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \leq 1,0 \quad (\text{Equação 4.14, página 4-11})$$

$$\beta_s = \left(\frac{1-\beta_x}{\beta_x} \right) \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \varepsilon_{cu} \leq 1,0$$

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5\text{‰} & \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle \\ 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 & \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle \end{cases} \quad (1.5.8, \text{ página 1-5})$$

- concreto classe igual ou inferior a C50 ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$)

$$\beta_s = \left(\frac{1-\beta_x}{\beta_x} \right) \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) 3,5\text{‰} \leq 1,0 \quad \langle \beta_{x,34} \leq \beta_x \leq 1,000 \rangle$$

$$\langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

Equação 4.16

- concreto classe superior a C50 ($f_{ck} > 50 \text{ MPa}$)

$$\beta_s = \left(\frac{1-\beta_x}{\beta_x} \right) \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \left\{ 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \right\} \leq 1,0 \quad \langle \beta_{x,34} \leq \beta_x \leq 1,000 \rangle$$

$$\langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle$$

Equação 4.17

4.4.2.2 Armadura comprimida

4.4.2.2.1 Domínio 2

Considerando a Figura 4.13, observa-se, para o domínios 2 ($0,000 \leq \beta_x \leq \beta_{x,23}$), que o valor de ε_s é igual a 10‰ (Figura 4.15).

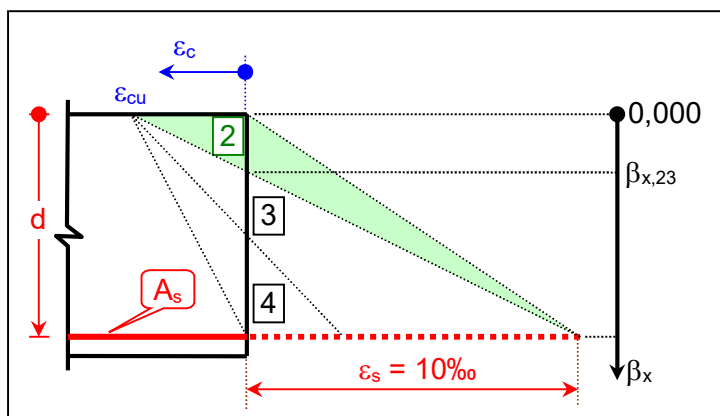


Figura 4.15 - Domínio 2 - ($\varepsilon_s = 10\text{‰}$)

Da Figura 4.12 (página 4-11), tem-se:

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{x - d'}{d - x} \right) \varepsilon_s = \left(\frac{\frac{x}{d} - \frac{d'}{d}}{1 - \frac{x}{d}} \right) 10\text{‰} \quad (\varepsilon_s = 10\text{‰} \text{ no domínio 2})$$

$$\beta_x = \frac{x}{d} \quad (\text{Equação 4.4, página 4-5})$$

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{\beta_x - \frac{d'}{d}}{1 - \beta_x} \right) 10\text{‰}$$

$$\beta'_s = \varepsilon'_s \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \leq 1,0 \quad (\text{Equação 4.14, página 4-11})$$

$$\beta'_s = \left(\frac{\beta_x - \frac{d'}{d}}{1 - \beta_x} \right) \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) 10\text{‰} \leq 1,0 \quad \langle 0,000 \leq \beta_x \leq \beta_{x,23} \rangle \quad \text{Equação 4.18}$$

4.4.2.2.2 Domínios 3 e 4

Considerando a Figura 4.15, observa-se, para o domínios 3 e 4 ($\beta_{x,23} \leq \beta_x \leq 1,000$), que o encurtamento do concreto corresponde ao valor último ε_{cu} (Figura 4.16).

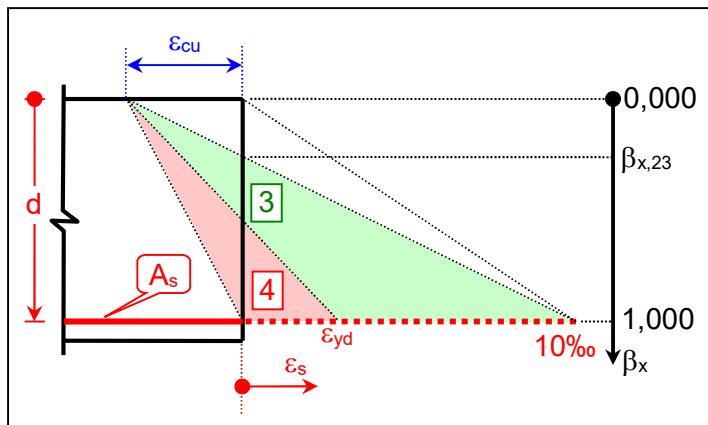


Figura 4.16 - Domínios 3 e 4 - ($\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$)

Da Figura 4.12 (página 4-11), tem-se:

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{x - d'}{x} \right) \varepsilon_c = \left(\frac{\frac{x}{d} - \frac{d'}{d}}{\frac{x}{d}} \right) \varepsilon_{cu} \quad (\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} \text{ nos domínios 3 e 4})$$

$$\beta_x = \frac{x}{d} \quad (\text{Equação 4.4, página 4-5})$$

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{\beta_x - \frac{d'}{d}}{\beta_x} \right) \varepsilon_{cu}$$

$$\beta'_s = \varepsilon'_s \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \leq 1,0 \quad (\text{Equação 4.14, página 4-11})$$

$$\beta'_s = \left(\frac{\beta_x - \frac{d'}{d}}{\beta_x} \right) \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \varepsilon_{cu} \leq 1,0$$

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5\text{‰} & \langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle \\ 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 & \langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle \end{cases} \quad (1.5.8, \text{ página 1-5})$$

- concreto classe igual ou inferior a C50 ($f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$)

$$\beta'_s = \left(\frac{\beta_x - \frac{d'}{d}}{\beta_x} \right) \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) 3,5\text{‰} \leq 1,0$$

$\langle \beta_{x,23} \leq \beta_x \leq 1,000 \rangle$
 $\langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle$

Equação 4.19

- concreto classe superior a C50 ($f_{ck} > 50 \text{ MPa}$)

$$\beta'_s = \left(\frac{\beta_x - \frac{d'}{d}}{\beta_x} \right) \left(\frac{\gamma_s E_s}{f_{yk}} \right) \left\{ 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \right\} \leq 1,0$$

$\langle \beta_{x,23} \leq \beta_x \leq 1,000 \rangle$
 $\langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle$

Equação 4.20

4.4.2.3 Valores tabelados

Considerando da Equação 4.15 a Equação 4.20, consta-se que os valores de β_s e β'_s são funções de β_x , da relação d/d' , da classe do concreto (f_{ck}), da categoria do aço (f_{yk}) e do coeficiente de segurança do aço (γ_s). Assim como feito para as variáveis β_y , β_z , e β_c (Tabela 4.3, página 4-10), é possível associar os valores β_s e β'_s a valores pré-fixados de β_x , e outros, como mostrado na Tabela 4.3, feita para o aço CA-25 ($\gamma_s = 1,15$) e concreto C70⁴.

Concreto C70														
Aço CA-25			$\gamma_s = 1,15$		β'_s para (d'/d) =									
β_x	β_y	β_z	β_c	β_s	0,025	0,050	0,075	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,225	0,250
0,100	0,075	0,963	0,055	1,000	0,805	0,537	0,268							
0,220	0,165	0,918	0,116	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,816	0,525	0,233		
0,320	0,240	0,880	0,162	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,962	0,762	0,561
$\beta_{x,dfl}$	0,263	0,869	0,174	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,916	0,733
0,450	0,338	0,831	0,215	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabela 4.4 - Flexão simples - C70 e CA-25 ($\gamma_s = 1,15$)

⁴ As tabelas completas estão apresentadas em 4.13 (página 4-53 em diante).

W_0 é o módulo de resistência da seção transversal bruta do concreto, relativo à fibra mais tracionada; e

$f_{ctk,sup}$ é a resistência característica superior do concreto à tração (1.5.5, página 1-4).

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 2,756 \ln(1 + 0,11 f_{ck}) \quad \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle$$

Equação 4.22

A taxa de armadura longitudinal mínima (ρ_{min}) é definida como sendo:

$$\rho_{min} = \frac{A_{s,min}}{A_c} \geq 0,15\%$$

Equação 4.23

onde:

$A_{s,min}$ corresponde a área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada determinada pelo dimensionamento da seção transversal do elemento de concreto estrutural, necessária para resistir ao momento fletor $M_{d,min}$, como estabelecido pela Equação 4.21; e

A_c corresponde a área da seção transversal bruta do elemento de concreto que incorpora a armadura $A_{s,min}$.

4.6.2 Armadura máxima

A especificação de valores máximos para as armaduras decorre da necessidade de se assegurar condições de ductilidade e de se respeitar o campo de validade dos ensaios que deram origem às prescrições de funcionamento do conjunto aço-concreto.

A soma das armaduras de tração e compressão ($A_s + A'_s$) não devem ter valor maior que 4% A_c , calculada na região fora da zona de emendas.

A taxa de armadura longitudinal máxima (ρ_{max}) será dada por:

$$\rho_{max} = \frac{A_s + A'_s}{A_c} \leq 4\%$$

Equação 4.24

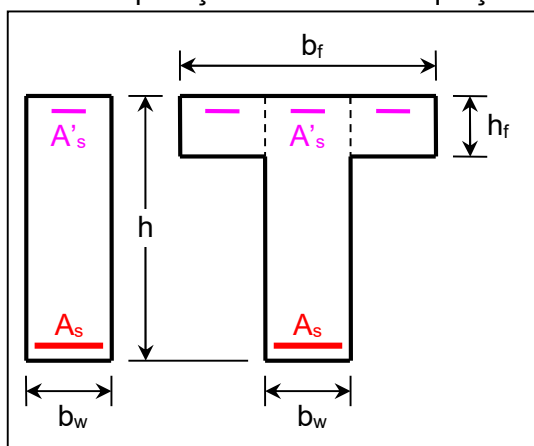
onde:

A_s corresponde a área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada;

A'_s corresponde a área da seção transversal da armadura longitudinal comprimida; e

A_c corresponde a área da seção transversal bruta do elemento de concreto que incorpora as armaduras A_s e A'_s .

A aplicação direta da Equação 4.24, para seções T, pode conduzir a vigas de difícil concretagem (excesso de armadura). A Figura 4.18



mostra uma seção retangular e uma seção T, de mesma altura (h) e mesma armadura tracionada (A_s). Admitindo-se que a armadura comprimida (A'_s) seja de pequena monta a seguinte situação pode vir a ocorrer:

$$\rho_{ret} = \frac{(A_s + A'_s)}{A_c} = \frac{(A_s + A'_s)}{b_w h} \leq 4\%$$

$$\rho_T = \frac{(A_s + \sum A'_s)}{A_c} = \frac{(A_s + \sum A'_s)}{b_w h + (b_f - b_w) h_f} \leq 4\%$$

Figura 4.18 - Comparativo entre seções retangulares e T

Como pode ser observado na Figura 4.18, no retângulo $b_w h$ as quantidades de armadura são iguais tanto para seção retangular como para a seção T. Isto nos leva a concluir que a verificação da taxa máxima de armadura em seções T deve ser feita tanto para a seção total como para a seção $b_w h$, de tal forma que:

$$\rho_T = \begin{cases} \frac{(A_s + \sum A'_s)}{b_w h + (b_f - b_w) h_f} \leq 4\% \\ \frac{(A_s + A'_s)}{b_w h} \leq 4\% \end{cases}$$

Como a concentração de armadura sempre ocorre no retângulo $b_w h$, a verificação da taxa máxima de armadura em seções retangulares e seções T pode, de modo simplificado, ser feita da seguinte forma:

$$\rho_{T,max} = \frac{A_s + A'_s}{b_w h} \leq 4\%$$

Equação 4.25

4.7 Vigas de seção retangular sem armadura de compressão

Seja a Figura 4.19 onde são mostrados, dentre outros:

- a solicitação de cálculo (M_{Sd});
- os esforços resistentes de cálculo (R_{cd} e R_{sd});
- os elementos geométricos referentes à seção transversal da viga (x , y , z , d , b_w e h);
- as deformações (ϵ_c e ϵ_s); e
- a área de armadura (A_s).

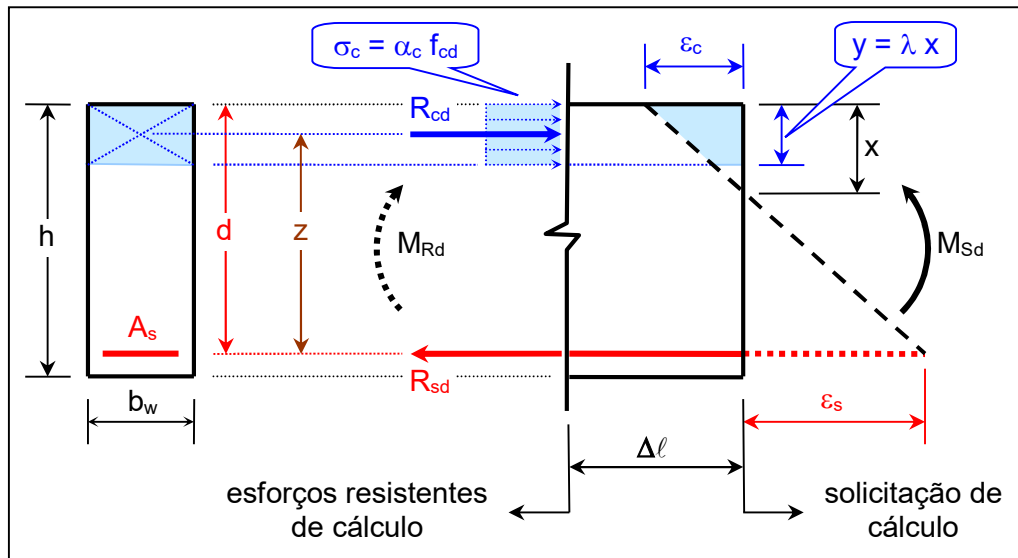


Figura 4.19 - Viga de seção retangular sem armadura de compressão

Da Figura 4.19 e considerando as equações anteriormente apresentadas, tem-se:

- elementos geométricos da seção retangular (Equação 4.11, página 4-9)
 - $x = \beta_x d$
 - $y = \beta_y d$
 - $z = \beta_z d$
- valores geométricos adimensionais (Equação 4.11, página 4-9)
 - $\beta_y = \lambda \beta_x$
 - $\beta_z = 1 - 0,5 \lambda \beta_x$
 - $\beta_c = \lambda \alpha_c \beta_x \beta_z$
- valor adimensional da tensão na armadura tracionada (Equação 4.14, página 4-11)
 - $\sigma_s = \beta_s f_{yd}$
- condição de segurança

$$M_{Rd} \geq M_{Sd}$$

- esforços resistentes de cálculo

$$R_{cd} = R_{sd}$$

- momento fletor (binário) devido aos esforços resistentes de cálculo

$$M_{Rd} = R_{cd} z = R_{sd} z$$

- esforço resistente de cálculo atuante na região de concreto comprimido de largura b_w

$$R_{cd} = (b_w y) \sigma_c$$

$$R_{cd} = (b_w)(\beta_y d)(\alpha_c f_{cd})$$

$$R_{cd} = (b_w)(\lambda \beta_x d)(\alpha_c f_{cd})$$

$$R_{cd} = \lambda \alpha_c \beta_x (b_w d) f_{cd}$$

- esforços resistentes de cálculo atuantes nas armaduras tracionadas

$$R_{sd} = A_s \sigma_s$$

$$R_{sd} = A_s \beta_s f_{yd}$$

$$R_{sd} = \beta_s A_s f_{yd}$$

- binário M_{Rd}/R_{cd}

$$M_{Rd} = R_{cd} z$$

$$R_{cd} = \lambda \alpha_c \beta_x (b_w d) f_{cd}$$

$$z = \beta_z d$$

$$\beta_c = \lambda \alpha_c \beta_x \beta_z$$

$$M_{Rd} = [\lambda \alpha_c \beta_x (b_w d) f_{cd}] (\beta_z d)$$

$$M_{Rd} = (\lambda \alpha_c \beta_x \beta_z) (b_w d^2 f_{cd})$$

$$M_{Rd} = \beta_c b_w d^2 f_{cd}$$

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_w d^2 f_{cd}}$$

- binário M_{Rd}/R_{sd}

$$M_{Rd} = R_{sd} z$$

$$R_{sd} = \beta_s A_s f_{yd}$$

$$z = \beta_z d$$

$$M_{Rd} = (\beta_s A_s f_{yd}) (\beta_z d)$$

$$A_s = \frac{M_{Rd}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}}$$

- equilíbrio dos esforços resistentes de cálculo

$$R_{cd} = \lambda \alpha_c \beta_x (b_w d) f_{cd}$$

$$R_{sd} = \beta_s A_s f_{yd}$$

$$R_{sd} = R_{cd}$$

$$\beta_s A_s f_{yd} = \lambda \alpha_c \beta_x (b_w d) f_{cd}$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x$$

- condições limites

- momento resistente (Equação 4.21, página 4-16)

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0,8 W_0 f_{ctk,inf} \\ M_{Sd} \end{bmatrix}$$

- dutilidade (Equação 4.10, página 4-8)

$$\beta_x \leq \beta_{x,dtl} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle \end{cases}$$

- armadura (Equação 4.23 e Equação 4.24, página 4-17)

$$A_s \begin{cases} \geq A_{s,min} \\ \leq A_{s,max} \end{cases}$$

- equações de cálculo com uso de tabelas

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0,8 W_0 f_{ctk,sup} \\ M_{Sd} \end{bmatrix}$$

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_w d^2 f_{cd}} \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x \\ \beta_z \\ \beta_s \end{cases}$$

$$\beta_x \leq \beta_{x,dtl} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle \end{cases}$$

$\beta_x \leq \beta_{x,dtl} \rightarrow$
não é necessária
armadura de
compressão

Equação 4.26

$$A_s = \frac{M_{Rd}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} \begin{cases} \geq A_{s,min} = 0,15\% A_c \\ \leq A_{s,max} = 4\% A_c \end{cases}$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x$$

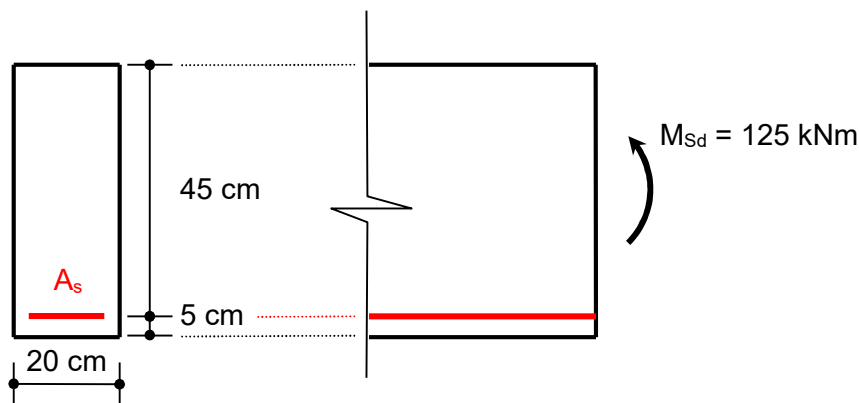
Exemplo 4.1: Determinar a armadura necessária para a viga abaixo indicada, a qual está submetida a um momento fletor solitante de cálculo (M_{Sd}) igual a 125 kNm.

Dados:

- concreto: C35; e
- aço: CA-50.

Considerar:

- somente solicitações normais (momentos fletores); e
- estado limite último, combinações normais ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$).



Solução: A solução do problema consiste na aplicação direta da Equação 4.26, com o uso da tabela para concreto C35 e aço CA-50 (página 4-61).

a) Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} = 3,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\lambda = 0,80 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\alpha_c = 0,85 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\beta_{x,dtl} = 0,45 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{35^2} = 4,17 \text{ MPa} = 0,417 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_c = 1,40 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{3,5}{1,40} = 2,50 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_s = 1,15 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$b_w = 20 \text{ cm}$$

$$d = 45 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$A_c = b_w h = 20 \times 50 = 1000 \text{ cm}^2$$

$$W_0 = \frac{b_w h^2}{6} = \frac{20 \times 50^2}{6} = 8333,33 \text{ cm}^3$$

$$M_{d,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} = 0,8 \times 8333,33 \times 0,417 = 2780,00 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd} = 125 \text{ kNm} = 12500 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 2780 \\ 12500 \end{bmatrix} = 12500 \text{ kNcm}$$

$$A_{s,min} = 0,15\% A_c = \frac{0,15}{100} \times 1000 = 1,50 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,max} = 4\% A_c = \frac{4}{100} \times 1000 = 40,00 \text{ cm}^2$$

b) Determinação de β_c

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_w d^2 f_{cd}} = \frac{12500}{20 \times 45^2 \times 2,50} = 0,123 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x = 0,197 \\ \beta_z = 0,921 \\ \beta_s = 1,000 \end{cases}$$

$$\underbrace{\beta_x}_{0,197} < \underbrace{\beta_{x,dll}}_{0,450} \quad \text{😊}$$

c) Cálculo da armadura A_s

$$A_s = \frac{M_{Rd}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} \begin{cases} \geq A_{s,min} \\ \leq A_{s,max} \end{cases}$$

$$A_s = \frac{12500}{0,921 \times 45 \times 1,000 \times 43,5} = 6,93 \text{ cm}^2 \begin{cases} > 1,50 \text{ cm}^2 \\ < 40,0 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad \text{😊}$$

$$A_s = 6,93 \text{ cm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

d) Verificação

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x$$

$$\beta_s = \left(\frac{0,8 \times 0,85 \times 20 \times 45 \times 2,50}{6,93 \times 43,5} \right) \times 0,197 = 1,000 \quad \text{😊}$$

e) Determinação de A_s sem o uso de tabelas

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_w d^2 f_{cd}} = \frac{12500}{20 \times 45^2 \times 2,50} = 0,1234568$$

$$\beta_c = \lambda \alpha_c \beta_x (1 - 0,5 \lambda \beta_x)$$

$$0,1234568 = 0,8 \times 0,85 \times \beta_x [1 - (0,5 \times 0,8 \times \beta_x)]$$

$$\beta_x^2 - 2,5 \beta_x + 0,4538853 = 0$$

$$\beta_x = \frac{2,5 - \sqrt{2,5^2 - (4 \times 0,4538853)}}{2} = 0,1970922$$

$$\beta_z = 1 - 0,5 \lambda \beta_x = 1 - (0,5 \times 0,8 \times 0,1970922) = 0,9211631$$

$$\beta_s = 1,000 \quad \langle 0,000 \leq \beta_x \leq \beta_{x,34} \rangle$$

$$A_s = \frac{M_{Rd}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} = \frac{12500}{0,9211631 \times 45 \times 1,000 \times 43,5} = 6,9322100 \text{ cm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x = \left(\frac{0,8 \times 0,85 \times 20 \times 45 \times 2,50}{6,9322100 \times 43,5} \right) \times 0,1970922 = 1,0000000 \quad \blacktriangleleft$$

4.8 Disposição da armadura

A distribuição e o posicionamento corretos das armaduras dentro da seção transversal de uma viga constitui fator de suma importância para a durabilidade das estruturas de concreto. A disposição da armadura dentro da seção transversal da viga não pode obstruir a colocação do concreto fresco, devendo permitir, com relativa folga, a introdução de equipamentos de vibração (Figura 4.20).

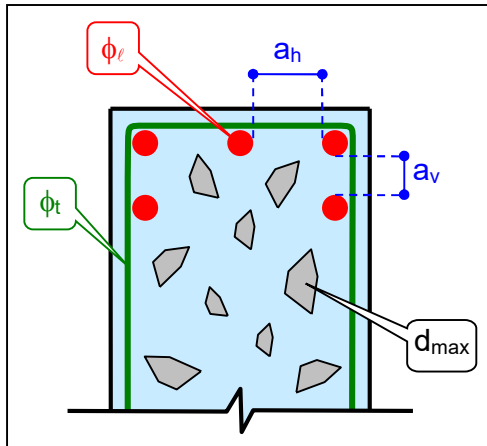


Figura 4.20 - Espaçamento horizontal e vertical de barras longitudinais

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores (ABNT NBR 6118 - 18.3.2.2):

- na direção horizontal (a_h):
 - 20 mm;
 - diâmetro da barra, do feixe ou da luva;
 - 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo;
- na direção vertical (a_v):
 - 20 mm;
 - diâmetro da barra, do feixe ou da luva;
 - 0,5 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo;

Para feixes de barras deve-se considerar o diâmetro do feixe: $\phi_n = \phi \sqrt{n}$. Esses valores se aplicam também às regiões de emendas por traspasse das barras."

$$a_h \geq \max \begin{bmatrix} 2\text{cm} \\ \phi_\ell \\ 1,2d_{\max} \end{bmatrix}$$

$$a_v \geq \max \begin{bmatrix} 2\text{cm} \\ \phi_\ell \\ 0,5d_{\max} \end{bmatrix}$$

Equação 4.27

Exemplo 4.2: Determinar o máximo momento fletor solicitante de cálculo (M_{Sd}) que a viga abaixo representada pode suportar.

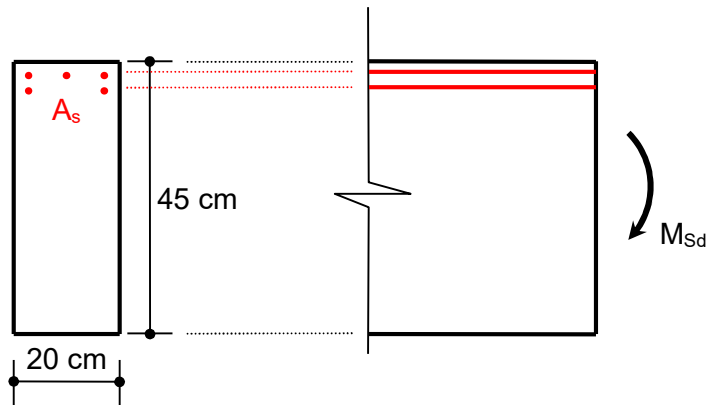
Dados:

- concreto: C70;
- aço: CA-50;
- armadura longitudinal: 5 ϕ 16 mm;
- armadura transversal: 6,3 mm;
- cobrimento: 3 cm; e
- dimensão máxima do agregado: 19 mm.

Considerar:

- somente solicitações normais (momentos fletores); e

- estado limite último, combinações normais ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$).



Solução: A solução do problema consiste na aplicação direta da Equação 4.26 e Equação 4.27, com o uso da tabela para concreto C35 e aço CA-50 (página 4-64).

a) Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{ck} = 70 \text{ MPa} = 7,0 \text{ kN/cm}^2$$

$$\lambda = 0,8 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \quad \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\lambda = 0,8 - \left(\frac{70 - 50}{400} \right) = 0,75$$

$$\alpha_c = 0,85 \left(1 - \frac{f_{ck} - 50}{200} \right) \quad \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\alpha_c = 0,85 \left[1 - \left(\frac{70 - 50}{200} \right) \right] = 0,765$$

$$\beta_{x,dll} = 0,35 \quad \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 2,756 \ln(1 + 0,11 f_{ck}) \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 2,756 \ln[1 + (0,11 \times 70)] = 5,96 \text{ MPa} = 0,596 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_c = 1,40 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{7,0}{1,40} = 5,00 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_s = 1,15 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$b_w = 20 \text{ cm}$$

$$h = 45 \text{ cm}$$

$$A_c = b_w h = 20 \times 45 = 900 \text{ cm}^2$$

$$W_0 = \frac{b_w h^2}{6} = \frac{20 \times 45^2}{6} = 6750 \text{ cm}^3$$

$$c_{nom} = 3 \text{ cm}$$

$$d_{max} = 19 \text{ mm} = 1,9 \text{ cm}$$

$$\phi_t = 6,3 \text{ mm} = 0,63 \text{ cm}$$

$$\phi_\ell = 16 \text{ mm} = 1,6 \text{ cm}$$

$$A_{s,min} = 0,15\% A_c = \frac{0,15}{100} \times 900 = 1,35 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,max} = 4\% A_c = \frac{4}{100} \times 900 = 36,00 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,ef} = 5 \times \frac{\pi \phi_t^2}{4} = 10,05 \text{ cm}^2 \left\{ \begin{array}{l} \geq 1,35 \text{ cm}^2 \\ \leq 36,00 \text{ cm}^2 \end{array} \right. \quad \text{😊}$$

$$M_{d,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} = 0,8 \times 6750 \times 0,596 = 3218,40 \text{ kNcm}$$

b) Verificação de a_h e a_v

$$a_h = \frac{b_w - (2c_{nom} + 2\phi_t + n\phi_\ell)}{n - 1}$$

b_w largura da viga (20 cm)

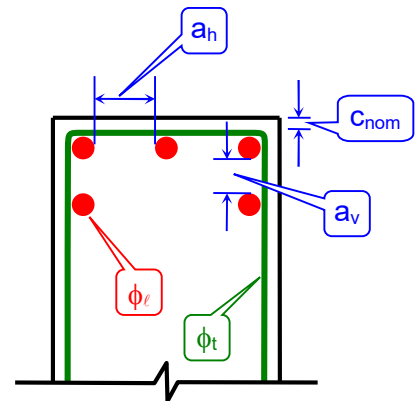
c_{nom} cobrimento nominal da armadura (3 cm)

ϕ_t diâmetro da armadura transversal (0,63 cm)

ϕ_ℓ diâmetro da armadura longitudinal (1,6 cm)

n número de barras na camada (3 barras)

$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3,0 + 2 \times 0,63 + 3 \times 1,6)}{3 - 1} = 3,97 \text{ cm}$$



$$a_h \geq \max \left[\begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 1,2 d_{max} \end{array} \right] \geq \max \left[\begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,6 \text{ cm} \\ 1,2 d_{max} = 1,2 \times 1,9 = 2,28 \text{ cm} \end{array} \right] \geq 2,28 \text{ cm}$$

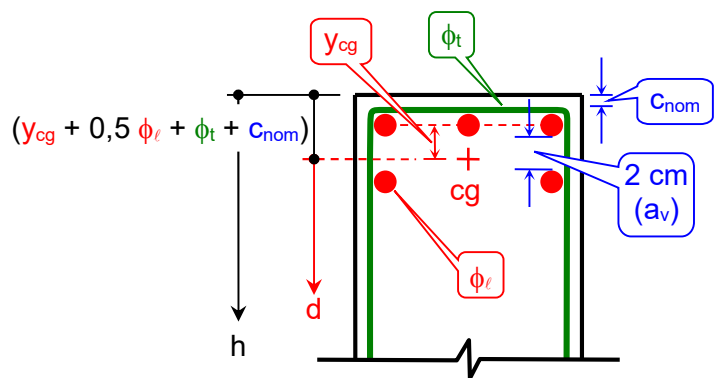
$$\underbrace{a_{h,cal}}_{3,97 \text{ cm}} > \underbrace{a_{h,min}}_{2,28 \text{ cm}} \quad \text{😊}$$

$$a_v \geq \max \left[\begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 0,5 d_{max} \end{array} \right] \geq \max \left[\begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 1,6 \text{ cm} \\ 0,5 d_{max} = 0,5 \times 1,9 = 0,95 \text{ cm} \end{array} \right] \geq 2,0 \text{ cm} \quad (\text{adotado } a_v = 2,00 \text{ cm})$$

c) Determinação da altura útil (d)⁵

$$y_{cg} < \frac{h}{10} < \frac{45}{10} < 4,5 \text{ cm}$$

$$y_{cg} = \frac{\sum A_{si} \times y_i}{\sum A_{si}}$$



$$d = h - (y_{cg} + 0,5 \phi_\ell + \phi_t + c_{nom})$$

$$y_{cg} = \frac{\left[3 \times \left(\frac{\pi \times 1,6^2}{4} \right) \times (0,0) \right] + \left[2 \times \left(\frac{\pi \times 1,6^2}{4} \right) \times \left(\frac{1,6}{2} + 2,0 + \frac{1,6}{2} \right) \right]}{\left[3 \times \left(\frac{\pi \times 1,6^2}{4} \right) \right] + \left[2 \times \left(\frac{\pi \times 1,6^2}{4} \right) \right]} = 1,44 \text{ cm} < 4,5 \text{ cm} \quad \text{😊}$$

⁵ ABNT NBR 6118 - 17.2.4.1: "Os esforços nas armaduras podem ser considerados no centro de gravidade correspondente, se a distância deste centro de gravidade ao centro da armadura mais afastada, medida normalmente à linha neutra, for menor que 10% de h ." (ver Figura 4.28, página 4-51)

$$d = h - \left(y_{cg} + \frac{\phi_\ell}{2} + \phi_t + c_{nom} \right)$$

$$d = 45 - \left(1,44 + \frac{1,6}{2} + 0,63 + 3,0 \right) = 39,13 \text{ cm}$$

d) Equação de verificação

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x$$

$$\beta_s = \left(\frac{0,75 \times 0,765 \times 20 \times 39,13 \times 5,00}{10,05 \times 43,5} \right) \times \beta_x = 5,135 \beta_x$$

$$\beta_x = 0,195 \beta_s$$

1ª tentativa

$$\beta_x = 0,195 \text{ (admitindo } \beta_s = 1,000)$$

$$\beta_x = 0,195 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_z = 0,927 \\ \beta_c = 0,104 \\ \beta_s = 1,000 \end{cases}$$

$$\beta_s = 5,135 \beta_x = 5,135 \times 0,195 = 1,001 \cong 1,000$$



$$\underbrace{\beta_x}_{0,195} < \underbrace{\beta_{x,dll}}_{0,350}$$



e) Momento resistente de cálculo (M_{Rd})

$$M_{Rd} = \beta_c b_w d^2 f_{cd}$$

$$M_{Rd} = 0,104 \times 20 \times 39,13^2 \times 5,00 = 15924 \text{ kNcm} = 159,24 \text{ kNm}$$

verificação

$$A_s = \frac{M_{Rd}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} = \frac{15924}{0,927 \times 39,13 \times 1,000 \times 43,5} = 10,09 \text{ cm}^2 \cong 10,05 \text{ cm}^2$$



f) Momento solicitante de cálculo (M_{Sd})

$$M_{Sd} = M_{Rd} = 159,24 \text{ kNm} \blacktriangleleft$$

4.9 Vigas de seção retangular com armadura de compressão

Conforme mostrado na Equação 4.26 (página 4-20), vigas com dimensões adequadas e sem armadura de compressão, tem comportamento dútil desde que sejam projetadas com a posição da linha neutra satisfazendo a condição de $\beta_x \leq \beta_{x,dll}$.

A tentativa de sempre dimensionar vigas sem armadura de compressão nem sempre é possível. Momentos flettores solicitantes de maior porte podem necessitar que a posição de linha neutra se aproxime do domínio 4, ou mesmo que se situe neste domínio, de tal forma que a viga passe a ter um comportamento frágil ($\beta_x > \beta_{x,dll}$).

A utilidade das vigas pode ser sempre garantida com o uso de armadura de compressão, como mostrado na Figura 4.21. Para tal, basta forçar que a linha neutra fique posicionada no domínio 2 ou no domínio 3, impondo que $\beta_x \leq \beta_{x,dll}$.

Embora possa ser atribuído para β_x qualquer valor compreendido entre 0,000 e $\beta_{x,dll}$, é prática comum adotar para β_x o valor de $\beta_{x,dll}$. Para adoção de valores de β_x inferiores a $\beta_{x,dll}$ é conveniente verificar qual deles conduzirá ao dimensionamento mais econômico, ou seja, aquele que levar a menor quantidade total de armadura (menor $A_s + A'_s$).

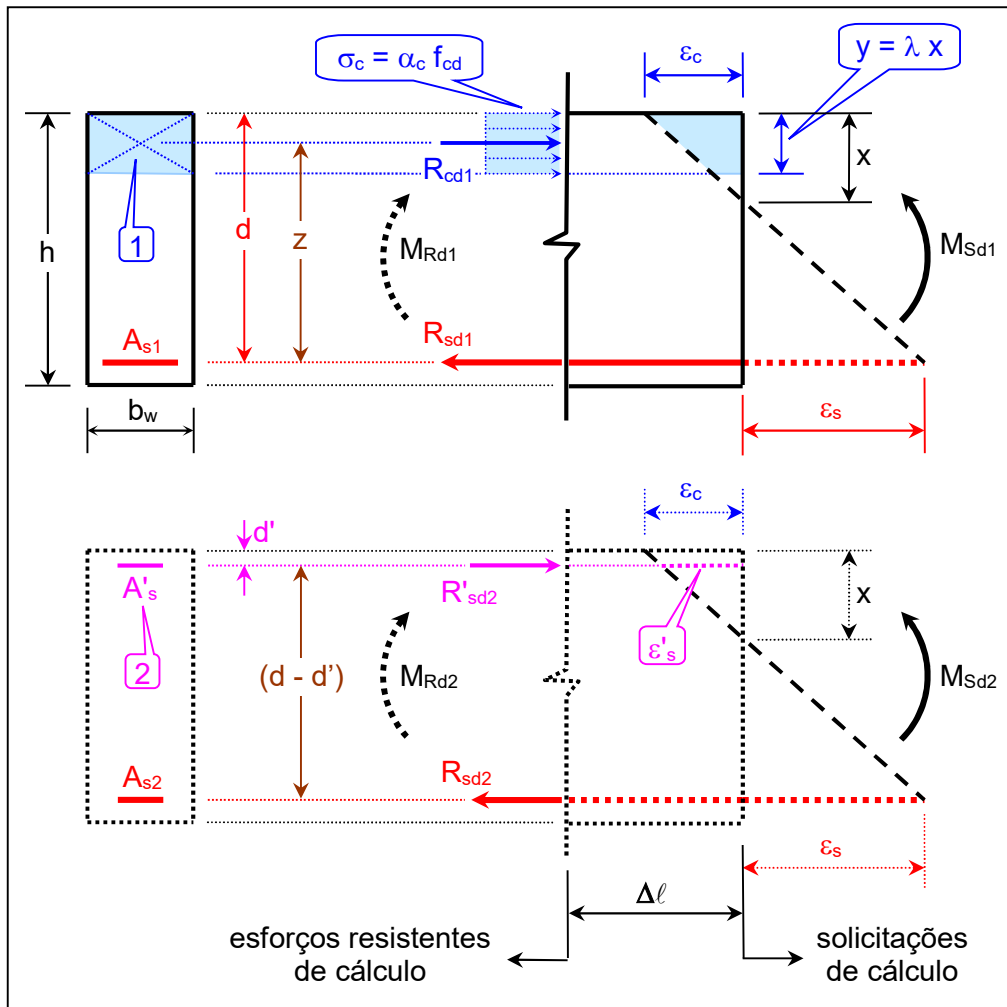


Figura 4.21 - Vigas de seção retangular com armadura de compressão

Como mostrado na Figura 4.21, o momento fletor resistente de cálculo M_{Rd} ($M_{Rd} \geq M_{Sd}$) é composto por dois momentos M_{Rd1} e M_{Rd2} .

No que se refere a M_{Rd1} (parte superior da Figura) valem todas as considerações apresentadas em 4.7 (página 4-18), em especial, o contido na Equação 4.26 (página 4-20). Desta forma:

- binário M_{Rd1}/R_{cd1}

$$\beta_c = \frac{M_{Rd1}}{b_w d^2 f_{cd}}$$

- binário M_{Rd1}/R_{sd1}

$$A_{s1} = \frac{M_{Rd1}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}}$$

- equilíbrio dos esforços resistentes de cálculo R_{cd1} e R_{sd1}

$$A_{s1} = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{\beta_s f_{yd}} \right) \beta_x$$

No que se refere a M_{Rd2} (parte inferior da Figura 4.21), tem-se:

- esforço resistente de cálculo atuante na armadura tracionada

$$R_{sd2} = A_{s2} \sigma_s$$

$$R_{sd2} = A_{s2} \beta_s f_{yd}$$

$$R_{sd2} = \beta_s A_{s2} f_{yd}$$

- binário M_{Rd2}/R_{sd2}

$$M_{Rd2} = R_{sd2} (d - d')$$

$$M_{Rd2} = \beta_s A_{s2} f_{yd} (d - d')$$

$$A_{s2} = \frac{M_{Rd2}}{(d - d') \beta_s f_{yd}}$$
- esforço resistente de cálculo atuante na armadura comprimida
$$R'_{sd2} = A'_s \sigma'_s$$

$$R'_{sd2} = A'_s \beta'_s f_{yd}$$

$$R'_{sd2} = \beta'_s A'_s f_{yd}$$
- binário M_{Rd2}/R'_{sd2}

$$M_{Rd2} = R'_{sd2} (d - d')$$

$$M_{Rd2} = \beta'_s A'_s f_{yd} (d - d')$$

$$A'_s = \frac{M_{Rd2}}{(d - d') \beta'_s f_{yd}}$$
- equilíbrio dos esforços resistentes de cálculo R'_{sd2} e R_{sd2}

$$R'_{sd2} = \beta'_s A'_s f_{yd}$$

$$R_{sd2} = \beta_s A_{s2} f_{yd}$$

$$\beta_s A_{s2} f_{yd} = \beta'_s A'_s f_{yd}$$

$$A_{s2} = \frac{\beta'_s}{\beta_s} A'_s$$

Considerando a somatória dos esforços solicitantes e resistentes, tem-se:

- momento solicitante
$$M_{Sd} = M_{Sd1} + M_{Sd2}$$
- momento resistente
$$M_{Rd} = M_{Rd1} + M_{Rd2}$$
- armadura tracionada - 1ª consideração
$$A_s = A_{s1} + A_{s3}$$

$$A_s = \frac{M_{Rd1}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} + \frac{M_{Rd2}}{(d - d') \beta_s f_{yd}}$$

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd2}}{(d - d')} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}}$$
- armadura tracionada - 2ª consideração
$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

$$A_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{\beta_s f_{yd}} \right) \beta_x + \frac{\beta'_s}{\beta_s} A'_s$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left(\frac{A'_s}{A_s} \right) \beta'_s$$

- condições limites

- momento resistente (Equação 4.21, página 4-16)

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0,8 W_0 f_{ctk,inf} \\ M_{Sd} \end{bmatrix}$$

- dutilidade (Equação 4.10, página 4-8)

$$\beta_x \leq \beta_{x,dtl} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle \end{cases}$$

- armadura (Equação 4.23 e Equação 4.24, página 4-17)

$$A_s \begin{cases} \geq A_{s,min} \\ \leq A_{s,max} \end{cases}$$

- equações de cálculo com uso de tabelas

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0,8 W_0 f_{ctk,sup} \\ M_{Sd} \end{bmatrix}$$

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_w d^2 f_{cd}} \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x \\ \beta_z \\ \beta_s \end{cases}$$

$$\beta_x > \beta_{x,dtl} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle \end{cases}$$

$\beta_x > \beta_{x,dtl} \rightarrow$
necessária
armadura de
compressão

$$\text{adotar} \begin{cases} \beta_x < \beta_{x,dtl} \\ \text{ou} \\ \beta_x = \beta_{x,dtl} \end{cases} \quad (\text{melhor solução})$$

$$\left. \begin{matrix} \beta_x \\ \frac{d'}{d} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_z \\ \beta_c \\ \beta_s \\ \beta'_s \end{cases}$$

$$M_{Rd1} = \beta_c b_w d^2 f_{cd}$$

$$M_{Rd2} = M_{Rd} - M_{Rd1}$$

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd2}}{(d - d')} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}} \geq 0,15\% A_c$$

Equação 4.28

$$A'_s = \frac{M_{Rd2}}{(d - d') \beta'_s f_{yd}}$$

$$(A_s + A'_s) \leq 4\% A_c$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left(\frac{A'_s}{A_s} \right) \beta'_s$$

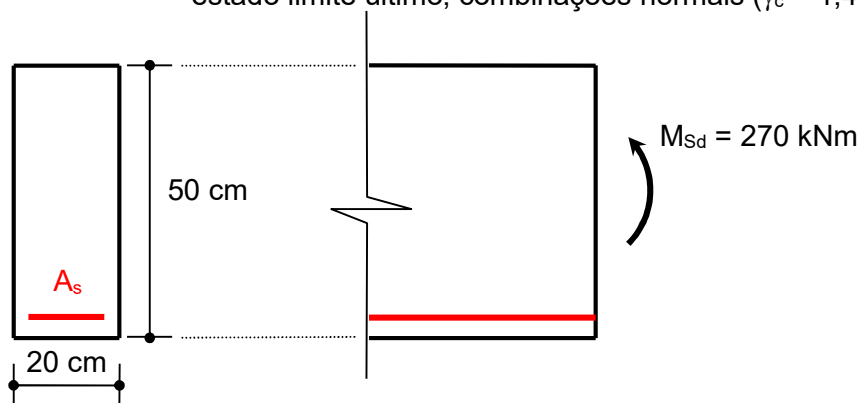
Exemplo 4.3: Determinar a armadura necessária para a viga abaixo indicada, a qual está submetida a um momento fletor solicitante de cálculo (M_{Sd}) igual a 270 kNm.

Dados:

- concreto: C35;
- aço: CA-50;
- armadura transversal: 6,3 mm;
- cobrimento: 3 cm; e
- dimensão máxima do agregado: 19 mm.

Considerar:

- somente solicitações normais (momentos fletores); e
- estado limite último, combinações normais ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$).



Solução: A solução do problema consiste na aplicação da Equação 4.26 ou Equação 4.28, com o uso da tabela para concreto C35 e aço CA-50 (página 4-61).

a) Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} = 3,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\lambda = 0,80 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\alpha_c = 0,85 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\beta_{x,dli} = 0,45 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{35^2} = 4,17 \text{ MPa} = 0,417 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_c = 1,40 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{3,5}{1,40} = 2,50 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_s = 1,15 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$b_w = 20 \text{ cm}$$

$$d = 45 \text{ cm (assumido)}$$

$$d' = 5 \text{ cm (assumido)}$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{5}{45} = 0,111$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$A_c = b_w h = 20 \times 50 = 1000 \text{ cm}^2$$

$$W_0 = \frac{b_w h^2}{6} = \frac{20 \times 50^2}{6} = 8333,33 \text{ cm}^3$$

$$c_{nom} = 3 \text{ cm}$$

$$\phi_t = 6,3 \text{ mm} = 0,63 \text{ cm}$$

$$d_{max} = 19 \text{ mm} = 1,9 \text{ cm}$$

$$M_{d,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} = 0,8 \times 8333,33 \times 0,417 = 2780,00 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd} = 270 \text{ kNm} = 27000 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 2780 \\ 27000 \end{bmatrix} = 27000 \text{ kNcm}$$

$$A_{s,min} = 0,15\% A_c = \frac{0,15}{100} \times 1000 = 1,50 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,max} = 4\% A_c = \frac{4}{100} \times 1000 = 40,00 \text{ cm}^2$$

b) Determinação de β_c

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_w d^2 f_{cd}} = \frac{27000}{20 \times 45^2 \times 2,50} = 0,267 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x = 0,487 \\ \beta_z = 0,805 \\ \beta_s = 1,000 \end{cases}$$

$$\beta_x > \beta_{x,dll}$$



$\beta_x > \beta_{x,dll} \rightarrow$
necessária armadura
de compressão

c) Condição de utilidade

$$\beta_x = \beta_{x,dll} = 0,450$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_x = 0,450 \\ \frac{d'}{d} = 0,111 \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_z = 0,820 \\ \beta_c = 0,251 \\ \beta_s = 1,000 \\ \beta'_s = 1,000 \end{cases}$$



$$M_{Rd1} = \beta_c b_w d^2 f_{cd} = 0,251 \times 20 \times 45^2 \times 2,50 = 25413,75 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd2} = M_{Rd} - M_{Rd1} = 27000,00 - 25413,75 = 1586,25 \text{ kNcm}$$

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd2}}{(d - d')} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}} = \left[\frac{25413,75}{0,820 \times 45} + \frac{1586,25}{(45 - 5)} \right] \frac{1}{1,000 \times 43,5} = 16,74 \text{ cm}^2 > 1,50 \text{ cm}^2$$



$$A'_s = \frac{M_{Rd2}}{(d - d') \beta_s f_{yd}} = \frac{1586,25}{(45 - 5) \times 1,000 \times 43,5} = 0,91 \text{ cm}^2$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left(\frac{A'_s}{A_s} \right) \beta'_s = \left(\frac{0,80 \times 0,85 \times 20 \times 45 \times 2,50}{16,74 \times 43,5} \right) \times 0,450 + \left(\frac{0,91}{16,74} \right) \times 1,000 = 1,000$$


$$A_{s,ef} = \begin{cases} 3 \phi 22 \text{ mm} = 3 \times \frac{\pi \times 2,2^2}{4} = 11,40 \text{ cm}^2 \\ + \\ 2 \phi 20 \text{ mm} = 2 \times \frac{\pi \times 2,0^2}{4} = 6,28 \text{ cm}^2 \end{cases} = 17,69 \text{ cm}^2 \text{ (2 camadas)}$$

$$A'_{s,ef} = 2 \phi 10 \text{ mm} = 2 \times \frac{\pi \times 1,00^2}{4} = 1,57 \text{ cm}^2$$

$$(A_s + A'_s)_{ef} = 17,69 + 1,57 = 19,26 \text{ cm}^2 < 40,00 \text{ cm}^2$$


$$A_{s,cal} = 16,74 \text{ cm}^2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow A_{s,ef} = 17,69 \text{ cm}^2$$

$$A'_{s,cal} = 0,91 \text{ cm}^2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow A'_{s,ef} = 1,57 \text{ cm}^2$$

d) Verificação de a_h e a_v

$$a_h = \frac{b_w - (2c_{nom} + 2\phi_t + n\phi_\ell)}{n - 1}$$

b_w largura da viga (20 cm)

c_{nom} cobrimento nominal da armadura (3 cm)

ϕ_t diâmetro da armadura transversal (estribo) (0,63 cm)

ϕ_ℓ diâmetro da armadura longitudinal (2,2 cm - 1ª camada)

n número de barras na camada (3 barras)

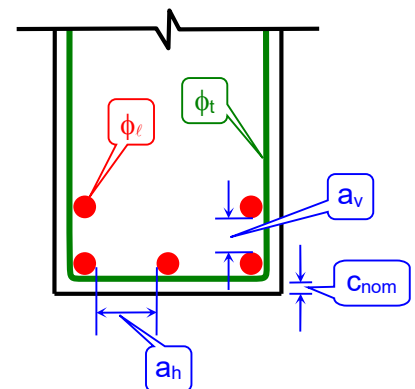
$$a_h = \frac{20 - (2 \times 3,0 + 2 \times 0,63 + 3 \times 2,2)}{3 - 1} = 3,07 \text{ cm}$$

$$a_h \geq \max \begin{bmatrix} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 1,2 d_{max} \end{bmatrix} \geq \max \begin{bmatrix} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 2,2 \text{ cm} \\ 1,2 d_{max} = 1,2 \times 1,9 = 2,28 \text{ cm} \end{bmatrix} \geq 2,28 \text{ cm}$$

$$\underbrace{a_{h,cal}}_{3,07 \text{ cm}} > \underbrace{a_{h,min}}_{2,28 \text{ cm}}$$


$$a_v \geq \max \begin{bmatrix} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell \\ 0,5 d_{max} \end{bmatrix} \geq \max \begin{bmatrix} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell = 2,2 \text{ cm} \\ 0,5 d_{max} = 0,5 \times 1,9 = 0,95 \text{ cm} \end{bmatrix} \geq 2,20 \text{ cm}$$

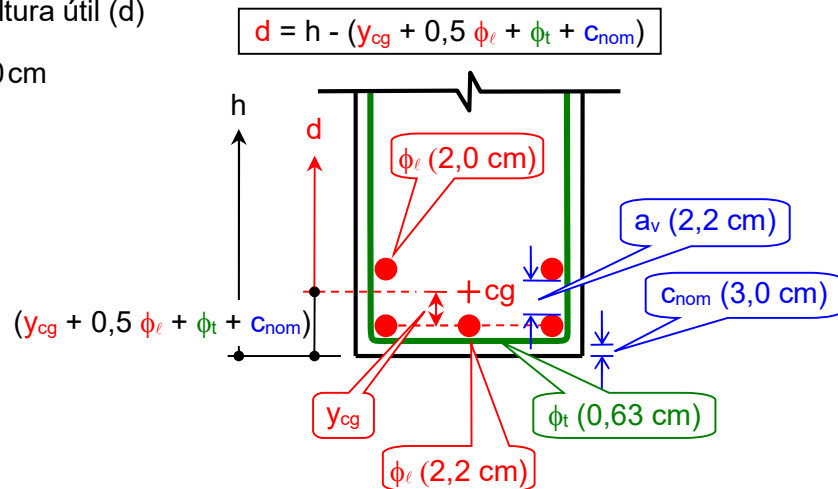
$$a_v = 2,2 \text{ cm (valor adotado)}$$



e) Determinação da altura útil (d)

$$y_{cg} < \frac{h}{10} < \frac{50}{10} < 5,0 \text{ cm}$$

$$y_{cg} = \frac{\sum A_{si} \times y_i}{\sum A_{si}}$$



$$y_{cg} = \frac{\left[3 \times \left(\frac{\pi \times 2,2^2}{4} \right) \times (0,0) \right] + \left[2 \times \left(\frac{\pi \times 2,0^2}{4} \right) \times \left(\frac{2,2}{2} + 2,2 + \frac{2,0}{2} \right) \right]}{\left[3 \times \left(\frac{\pi \times 2,2^2}{4} \right) \right] + \left[2 \times \left(\frac{\pi \times 2,0^2}{4} \right) \right]} = 1,53 \text{ cm} < 5,0 \text{ cm OK}$$

$$d = h - \left(y_{cg} + \frac{\phi_{\ell}}{2} + \phi_t + c_{nom} \right) = 50 - \left(1,53 + \frac{2,2}{2} + 0,63 + 3,0 \right) = 43,74 \text{ cm}$$

$$\underbrace{d_{adot}}_{45,00 \text{ cm}} > \underbrace{d_{cal}}_{43,74 \text{ cm}}$$



armadura mais próxima do centro de gravidade da seção geométrica → refazer os cálculos com d = 43,74 cm

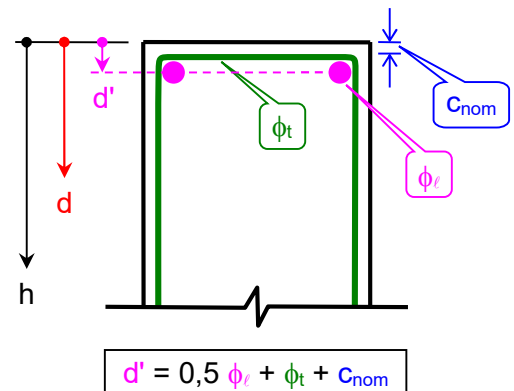
f) Determinação de d'

$$d' = \frac{\phi_{\ell}}{2} + \phi_t + c_{nom} = \frac{1,00}{2} + 0,63 + 3,0 = 4,13 \text{ cm}$$

$$\underbrace{d'_{adot}}_{5,00 \text{ cm}} > \underbrace{d'_{cal}}_{4,13 \text{ cm}}$$



armadura mais afastada do centro de gravidade da seção geométrica → não seria necessário refazer os cálculos com d' = 4,13 cm



g) Cálculo da armadura para novos valores de d e d'

$$d = 43,74 \text{ cm}$$

$$d' = 4,13 \text{ cm}$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{4,13}{43,74} = 0,094$$

$$\beta_x = 0,450$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_x = 0,450 \\ \frac{d'}{d} = 0,094 \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \left\{ \begin{array}{l} \beta_z = 0,820 \\ \beta_c = 0,251 \\ \beta_s = 1,000 \\ \beta'_s = 1,000 \end{array} \right.$$



$$M_{Rd1} = \beta_c b_w d^2 f_{cd} = 0,251 \times 20 \times 43,74^2 \times 2,50 = 24010,50 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd2} = M_{Rd} - M_{Rd1} = 27000,00 - 24010,50 = 2989,50 \text{ kNcm}$$

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd2}}{(d - d')} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}}$$

$$A_s = \left[\frac{24010,50}{0,820 \times 43,74} + \frac{2989,50}{(43,74 - 4,13)} \right] \frac{1}{1,000 \times 43,5} = 17,12 \text{ cm}^2 > 1,50 \text{ cm}^2 \quad \text{😊}$$

$$A'_s = \frac{M_{Rd2}}{(d - d') \beta'_s f_{yd}} = \frac{2989,50}{(43,74 - 4,13) \times 1,000 \times 43,5} = 1,74 \text{ cm}^2$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left(\frac{A'_s}{A_s} \right) \beta'_s$$

$$\beta_s = \left(\frac{0,80 \times 0,85 \times 20 \times 43,74 \times 2,50}{17,12 \times 43,5} \right) \times 0,450 + \left(\frac{1,74}{17,12} \right) \times 1,000 = 1,000 \quad \text{😊}$$

$$A_{s,ef} = \begin{cases} 3 \phi 22 \text{ mm} = 3 \times \frac{\pi \times 2,2^2}{4} = 11,40 \text{ cm}^2 \\ + \\ 2 \phi 20 \text{ mm} = 2 \times \frac{\pi \times 2,0^2}{4} = 6,28 \text{ cm}^2 \end{cases} = 17,69 \text{ cm}^2 \text{ (2 camadas)}$$

$$A'_{s,ef} = 3 \phi 10 \text{ mm} = 3 \times \frac{\pi \times 1,00^2}{4} = 2,36 \text{ cm}^2$$

$$(A_s + A'_{s,ef})_{ef} = 17,69 + 2,36 = 20,05 \text{ cm}^2 < 40,00 \text{ cm}^2 \quad \text{😊}$$

$$A_{s,cal} = 17,12 \text{ cm}^2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow A_{s,ef} = 17,69 \text{ cm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$A'_{s,cal} = 1,74 \text{ cm}^2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow A'_{s,ef} = 2,36 \text{ cm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

h) Resolução para $\beta_x < \beta_{x,dll}$

$\beta_x = 0,400$ (valor assumido)

$d = 43,74 \text{ cm}$

$d' = 4,26 \text{ cm}$

$$\frac{d'}{d} = \frac{4,26}{43,74} = 0,097$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_x = 0,400 \\ \frac{d'}{d} = 0,097 \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \left\{ \begin{array}{l} \beta_z = 0,840 \\ \beta_c = 0,228 \\ \beta_s = 1,000 \\ \beta'_s = 1,000 \end{array} \right. \quad \text{😊}$$

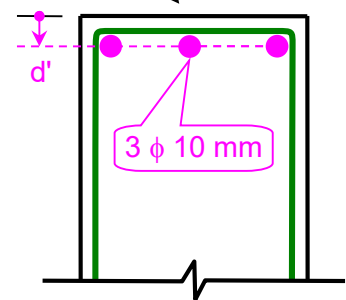
$$M_{Rd1} = \beta_c b_w d^2 f_{cd} = 0,228 \times 20 \times 43,74^2 \times 2,50 = 21810,34 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd2} = M_{Rd} - M_{Rd1} = 27000,00 - 21810,34 = 5189,66 \text{ kNcm}$$

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd2}}{(d - d')} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}}$$

$$A_s = \left[\frac{21810,34}{0,840 \times 43,74} + \frac{5189,66}{(43,74 - 4,26)} \right] \frac{1}{1,000 \times 43,5} = 16,67 \text{ cm}^2 > 1,50 \text{ cm}^2 \quad \text{😊}$$

$$A'_s = \frac{M_{Rd2}}{(d - d') \beta'_s f_{yd}} = \frac{5189,66}{(43,74 - 4,26) \times 1,000 \times 43,5} = 3,02 \text{ cm}^2$$



$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left(\frac{A'_s}{A_s} \right) \beta'_s$$

$$\beta_s = \left(\frac{0,80 \times 0,85 \times 20 \times 43,74 \times 2,50}{16,67 \times 43,5} \right) \times 0,400 + \left(\frac{3,02}{16,67} \right) \times 1,002 \cong 1,000 \quad \text{😊}$$

$$A_{s,ef} = \begin{cases} 3 \phi 22\text{mm} = 3 \times \frac{\pi \times 2,2^2}{4} = 11,40\text{cm}^2 \\ + \\ 2 \phi 20\text{mm} = 2 \times \frac{\pi \times 2,0^2}{4} = 6,28\text{cm}^2 \end{cases} = 17,69\text{cm}^2 \text{ (2 camadas)}$$

$$A'_{s,ef} = 3 \phi 12,5\text{mm} = 3 \times \frac{\pi \times 1,25^2}{4} = 3,68\text{cm}^2$$

$$d' = \frac{\phi_\ell}{2} + \phi_t + c_{nom} = \frac{1,25}{2} + 0,63 + 3,0 = 4,26\text{cm} \quad \text{😊}$$

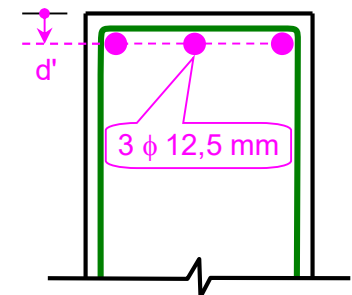
$$(A_s + A'_s)_{ef} = 17,69 + 3,68 = 21,37\text{cm}^2 < 40,00\text{cm}^2 \quad \text{😊}$$

$$A_{s,cal} = 16,67\text{cm}^2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow A_{s,ef} = 17,69\text{cm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$A'_{s,cal} = 3,02\text{cm}^2 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow A'_{s,ef} = 3,68\text{cm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

i) Comparação de resultados (valores de cálculo)

β_x	A_s cm^2	A'_s cm^2	$A_s + A'_s$ cm^2	Δ
0,450	17,12	1,74	18,86	4,40%
0,400	16,67	3,02	19,69	



4.10 Vigas de seção T sem armadura de compressão

4.10.1 Região de concreto comprimido

A região de concreto comprimido, em uma viga de seção T, pode ocorrer de três modos distintos, como apresentado na Figura 4.22.

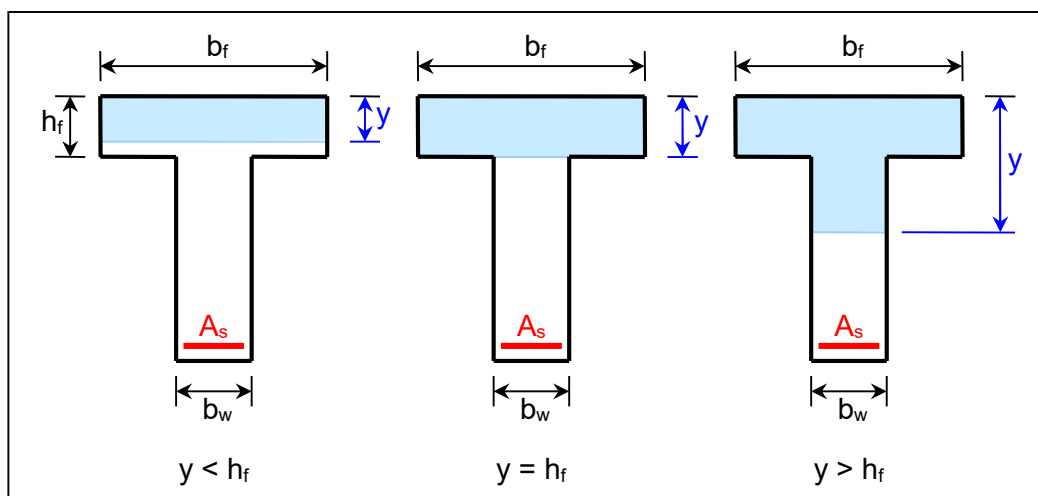


Figura 4.22 - Regiões de concreto comprimido em vigas de seção T

A situação em que toda a mesa está comprimida, corresponde a:

$$y = h_f$$

Considerando a Equação 4.11 (página 4-9), tem-se:

$$\beta_y = \frac{y}{d} = \frac{h_f}{d}$$

$$\beta_x = \frac{\beta_y}{\lambda} = \frac{h_f}{\lambda d}$$

$$\beta_c = \lambda \alpha_c \beta_x (1 - 0,5 \lambda \beta_x) = \lambda \alpha_c \left(\frac{h_f}{\lambda d} \right) \left[1 - 0,5 \lambda \left(\frac{h_f}{\lambda d} \right) \right] = \alpha_c \left(\frac{h_f}{d^2} \right) \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

Levando-se em conta as condições estabelecidas na Figura 4.19 (página 4-18), cuja região comprimida é definida pelo retângulo de dimensões $b_w y$, tem-se, pela Equação 4.26 (página 4-20):

$$M_{Rd1} = \beta_c b_w d^2 f_{cd}$$

$$M_{Rd1} = \alpha_c \left(\frac{h_f}{d^2} \right) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) b_w d^2 f_{cd} = \alpha_c (b_w h_f) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) f_{cd}$$

No caso particular em que b_w (da Figura 4.19) for igual a b_f (da Figura 4.22), e definindo, para este caso, M_{Rd1} como sendo o momento resistente de cálculo suportado pela mesa comprimida da seção T, tem-se:

$$M_{Rd1} = M_{Rd,mesa} = \alpha_c (b_f h_f) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) f_{cd}$$

$$M_{Rd,mesa} = \alpha_c (b_f h_f) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) f_{cd}$$

Equação 4.29

Desta forma, para as regiões de concreto comprimido em vigas de seções T, têm-se:

$$y < h_f \Leftrightarrow M_{Rd} < M_{Rd,mesa}$$

$$y = h_f \Leftrightarrow M_{Rd} = M_{Rd,mesa}$$

$$y > h_f \Leftrightarrow M_{Rd} > M_{Rd,mesa}$$

Equação 4.30

4.10.2 Seções T sem armadura de compressão: $y \leq h_f$

Seja Figura 4.23 onde está representada uma viga de seção T em que a solicitação de cálculo M_{Sd} é resistida pelo momento resistente de cálculo M_{Rd} , composto somente pelo binário de forças R_{cd} e R_{sd} , sem a necessidade de armadura de compressão.

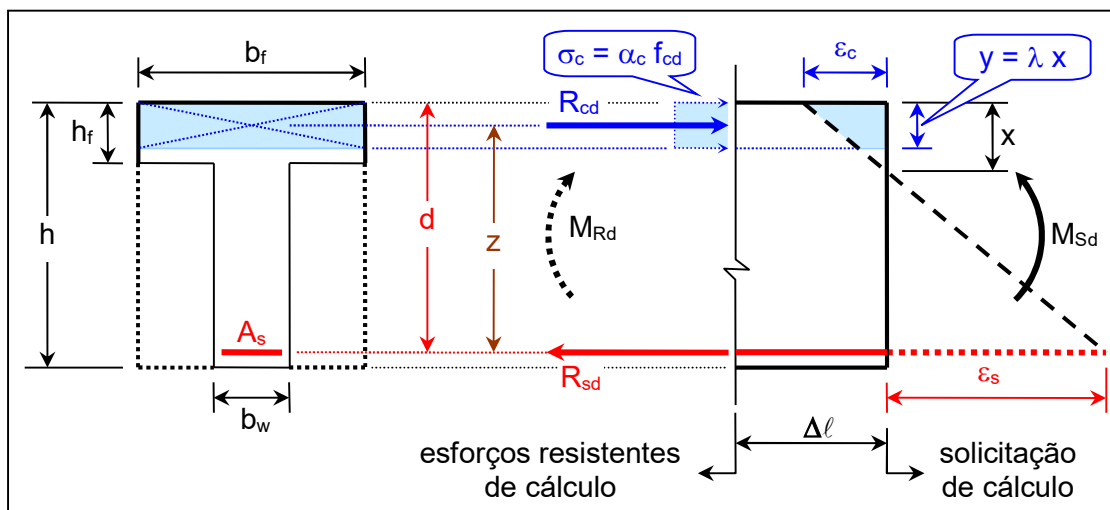


Figura 4.23 - Vigas de seção T sem armadura de compressão - $y \leq h_f$

Comparando a Figura 4.19 (página 4-18) com a Figura 4.23 pode-se concluir que a viga de seção T sem armadura de compressão, com $y \leq h_f$, é equivalente a uma viga de seção retangular de base b_f .

Desta forma, introduzindo valores de b_f nos lugares de b_w apresentados na Equação 4.26 (página 4-20), e considerando:

- a relação entre y e h_f (Equação 4.30);
- armadura mínima (Equação 4.23 - página 4-17); e
- armadura máxima (Equação 4.25 - página 4-18),

as vigas de seção T, sem armadura de compressão, com $y \leq h_f$, podem ser representadas por:

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0,8 W_0 f_{ctk,sup} \\ M_{Sd} \end{bmatrix}$$

$$M_{Rd,mesa} = \alpha_c (b_f h_f) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) f_{cd}$$

$$M_{Rd} \leq M_{Rd,mesa}$$


$M_{Rd} \leq M_{Rd,mesa} \rightarrow$
vale seção
retangular de base b_f

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_f d^2 f_{cd}} \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \\ \beta_s \end{cases}$$

$$\beta_x \leq \beta_{x,dll} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{ MPa} \rangle \end{cases}$$

$$y = \beta_y d \leq h_f$$

$$A_s = \frac{M_{Rd}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} \begin{cases} \geq A_{s,min} = 0,15\% A_c \\ \leq A_{s,max} = 4\% b_w h \end{cases}$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_f d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x$$

Equação 4.31

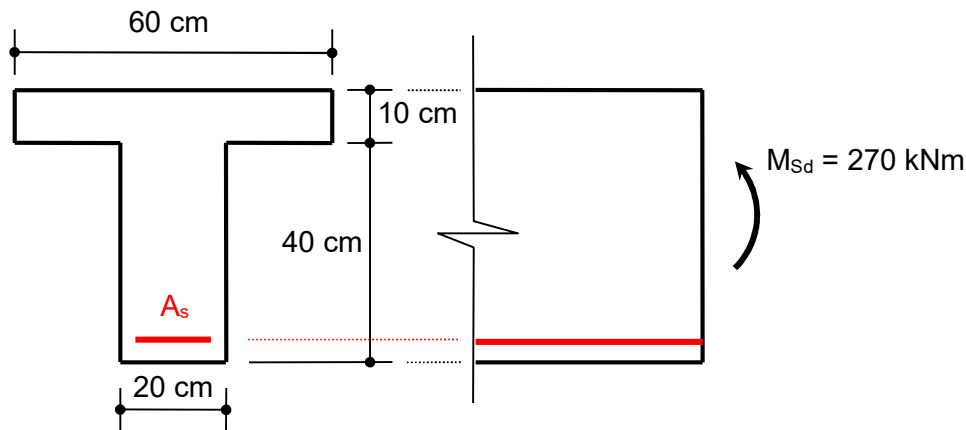
Exemplo 4.4: Determinar a armadura necessária para a viga abaixo indicada, a qual está submetida a um momento fletor solicitante de cálculo (M_{Sd}) igual a 270 kNm.

Dados:

- concreto: C35;
- aço: CA-50;
- armadura transversal: 6,3 mm;
- cobrimento: 3 cm; e
- dimensão máxima do agregado: 19 mm.

Considerar:

- somente solicitações normais (momentos fletores); e
- estado limite último, combinações normais ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$).



Solução: A solução do problema consiste na aplicação direta da Equação 4.31, com o uso da tabela para concreto C35 e aço CA-50 (página 4-61).

a) Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} = 3,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\lambda = 0,80 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\alpha_c = 0,85 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\beta_{x,dli} = 0,45 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{35^2} = 4,17 \text{ MPa} = 0,417 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_c = 1,40 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{3,5}{1,40} = 2,50 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_s = 1,15 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$b_w = 20 \text{ cm}$$

$$b_f = 60 \text{ cm}$$

$$d = 43 \text{ cm (assumido)}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

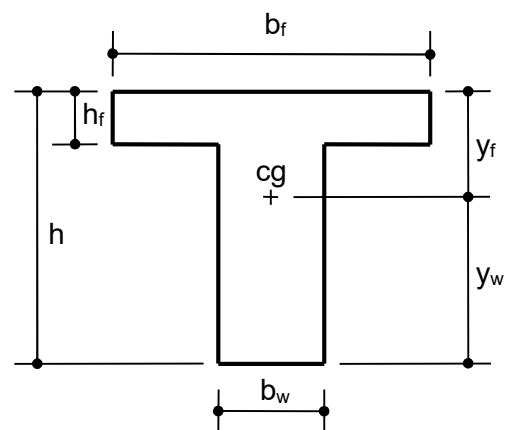
$$h_f = 10 \text{ cm}$$

$$A_c = b_w h + (b_f - b_w) h_f = 20 \times 50 + (60 - 20) \times 10 = 1400 \text{ cm}^2$$

$$y_w = \frac{(b_f h^2) - [(b_f - b_w)(h - h_f)^2]}{2\{[(b_f h) - [(b_f - b_w)(h - h_f)]\}} = \frac{(60 \times 50^2) - [(60 - 20) \times (50 - 10)^2]}{2\{[(60 \times 50) - [(60 - 20) \times (50 - 10)]\}} = 30,71 \text{ cm}$$

$$y_f = h - y_w = 50 - 30,71 = 19,29 \text{ cm}$$

$$I = \left\{ \frac{b_f h^3 - [(b_f - b_w)(h - h_f)^3]}{3} \right\} - A_c y_w^2$$



$$I = \left\{ \frac{60 \times 50^3 - [(60 - 20) \times (50 - 10)^3]}{3} \right\} - 1400 \times 30,71^2 = 326\,321 \text{ cm}^4$$

$$W_0 = W_{0,w} = \frac{I}{y_w} \Leftarrow \text{fibra mais tracionada (w)}$$

$$W_0 = \frac{326\,321}{30,71} = 10\,626 \text{ cm}^3$$

$$M_{Sd,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} = 0,8 \times 10\,626 \times 0,417 = 3\,544,83 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd} = 270 \text{ kNm} = 27\,000 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 3\,544,83 \\ 27\,000 \end{bmatrix} = 27\,000 \text{ kNcm}$$

$$A_{s,min} = 0,15\% A_c = \frac{0,15}{100} \times 1400 = 2,10 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,max} = 4\% b_w h = \frac{4}{100} \times 20 \times 50 = 40,00 \text{ cm}^2$$

$$M_{Rd,mesa} = \alpha_c (b_f h_f) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) f_{cd} = 0,85 \times (60 \times 10) \times \left(43 - \frac{10}{2} \right) \times 2,50 = 48\,450 \text{ kNcm}$$

$$\frac{M_{Rd}}{27\,000} < \frac{M_{Rd,mesa}}{48\,450} \quad \text{😊} \quad \rightarrow \quad \text{vale seção retangular de base } b_f$$

b) Determinação de β_c

$$\beta_c = \frac{M_{Rd}}{b_f d^2 f_{cd}} = \frac{27\,000}{60 \times 43^2 \times 2,50} = 0,097 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x = 0,152 \\ \beta_y = 0,122 \\ \beta_z = 0,939 \\ \beta_s = 1,000 \end{cases}$$

$$\beta_x < \beta_{x,dll} \quad \text{😊}$$

$$\frac{0,152}{0,152} < \frac{0,450}{0,450}$$

$$y = \beta_y d = 0,122 \times 43 = 5,25 \text{ cm}$$

$$y < h_f \quad \text{😊}$$

$$\frac{5,25 \text{ cm}}{5,25 \text{ cm}} < \frac{10,00 \text{ cm}}{10,00 \text{ cm}}$$

c) Cálculo da armadura A_s

$$A_s = \frac{M_{Rd}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} \begin{cases} \geq A_{s,min} \\ \leq A_{s,max} \end{cases}$$

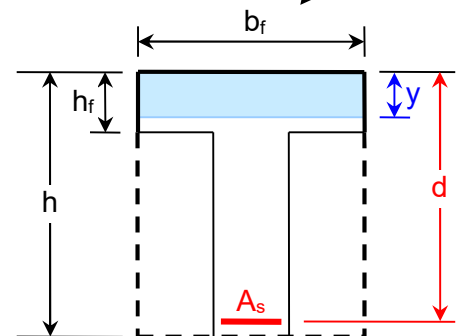
$$A_s = \frac{27\,000}{0,939 \times 43 \times 1,000 \times 43,5} = 15,37 \text{ cm}^2 \quad \begin{cases} > 2,10 \text{ cm}^2 \\ < 40,0 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad \text{😊}$$

$$A_{s,cal} = 15,37 \text{ cm}^2 \quad \blacktriangleleft$$

$$A_{s,ef} = 5 \phi 20 \text{ mm} = 5 \times \frac{\pi \times 2,0^2}{4} = 15,71 \text{ cm}^2$$

d) Determinação da altura útil (d)

$$y_{cg} < \frac{h}{10} < \frac{50}{10} < 5,0 \text{ cm} \quad y_{cg} = \frac{\sum A_{si} \times y_i}{\sum A_{si}}$$



$$A_s = 15,37 \text{ cm}^2$$

4.10.3 Seções T sem armadura de compressão: $y > h_f$

Seja Figura 4.24 onde está representada uma viga de seção T em que a solicitação de cálculo M_{Sd} ($M_{Sd} = M_{Sd1} + M_{Sd3}$) é resistida pelo momento resistente de cálculo M_{Rd} ($M_{Rd} = M_{Rd1} + M_{Rd3}$), composto pelos binários das forças R_{cd1} / R_{sd1} e R_{cd3} / R_{sd3} , sem a necessidade de armadura de compressão.

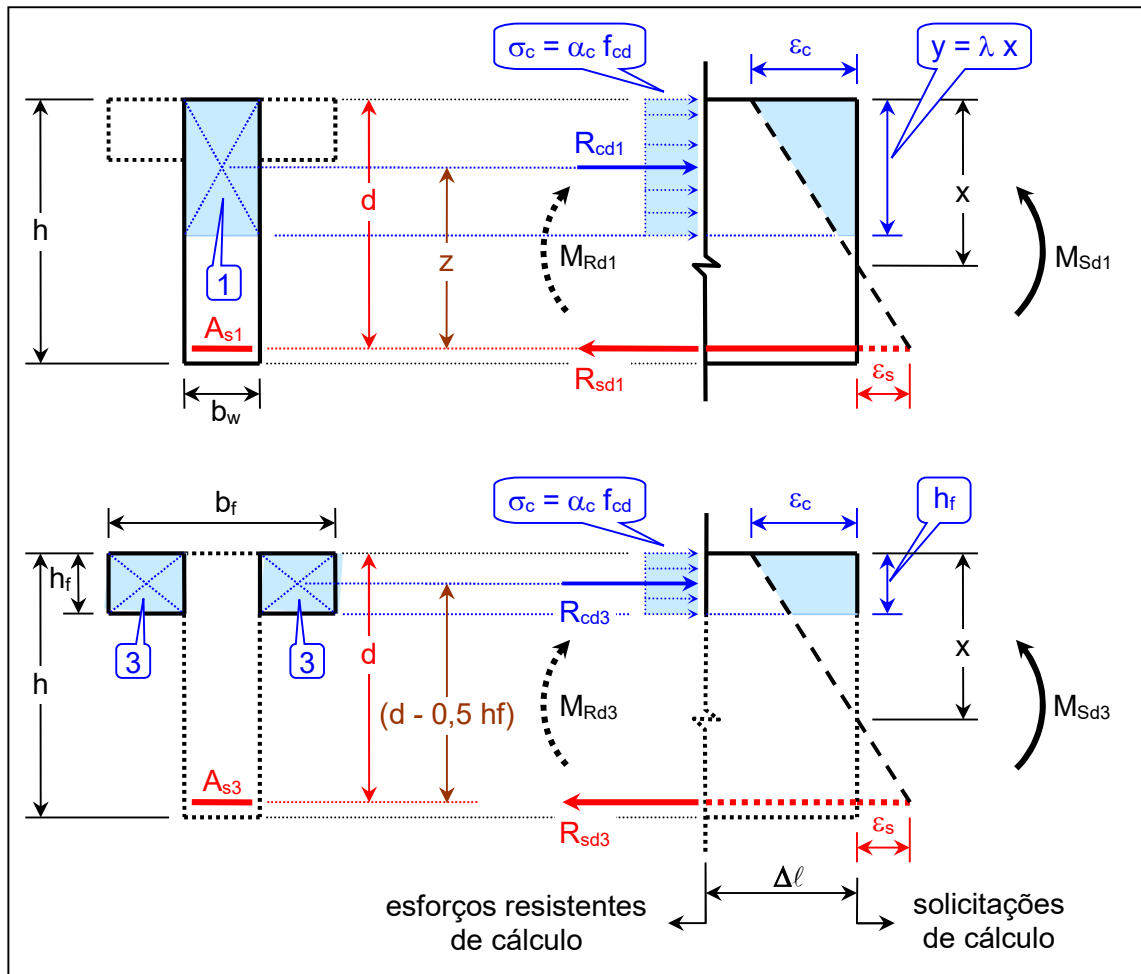


Figura 4.24 - Vigas de seção T sem armadura de compressão - $y > h_f$

Como mostrado na Figura 4.24, o momento fletor resistente de cálculo M_{Rd} ($M_{Rd} \geq M_{Sd}$) é composto por dois momentos M_{Rd1} e M_{Rd3} .

No que se refere a M_{Rd1} (parte superior da Figura) valem todas as considerações apresentadas em 4.7 (página 4-18), em especial, o contido na Equação 4.26 (página 4-20). Desta forma:

- binário M_{Rd1}/R_{cd1}

$$\beta_c = \frac{M_{Rd1}}{b_w d^2 f_{cd}}$$

- binário M_{Rd1}/R_{sd1}

$$A_{s1} = \frac{M_{Rd1}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}}$$

- equilíbrio dos esforços resistentes de cálculo R_{cd1} e R_{sd1}

$$A_{s1} = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{\beta_s f_{yd}} \right) \beta_x$$

No que se refere a M_{Rd3} (parte inferior da Figura), tem-se:

- esforço resistente de cálculo atuante na região de concreto comprimido de largura $b_f - b_w$

$$R_{cd3} = [(b_f - b_w) h_f] \sigma_c$$

$$R_{cd3} = [(b_f - b_w) h_f] (\alpha_c f_{cd})$$

- binário M_{Rd3}/R_{cd3}

$$M_{Rd3} = R_{cd3} \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

$$M_{Rd3} = \alpha_c \left[(b_f - b_w) h_f \left(d - \frac{h_f}{2} \right) \right] f_{cd}$$

- esforço resistente de cálculo atuante na armadura tracionada

$$R_{sd3} = A_{s3} \sigma_s$$

$$R_{sd3} = A_{s3} \beta_s f_{yd}$$

$$R_{sd3} = \beta_s A_{s3} f_{yd}$$

- binário M_{Rd3}/R_{sd3}

$$M_{Rd3} = R_{sd3} \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

$$M_{Rd3} = \beta_s A_{s3} f_{yd} \left(d - \frac{h_f}{2} \right)$$

$$A_{s3} = \frac{M_{Rd3}}{\left(d - \frac{h_f}{2} \right) \beta_s f_{yd}}$$

- equilíbrio dos esforços resistentes de cálculo R_{cd3} e R_{sd3}

$$R_{cd3} = [(b_f - b_w) h_f] (\alpha_c f_{cd})$$

$$R_{sd3} = \beta_s A_{s3} f_{yd}$$

$$\beta_s A_{s3} f_{yd} = \alpha_c [(b_f - b_w) h_f] f_{cd}$$

$$A_{s3} = \frac{\alpha_c [(b_f - b_w) h_f] f_{cd}}{\beta_s f_{yd}}$$

Considerando a somatória dos esforços solicitantes e resistentes, tem-se:

- momento solicitante

$$M_{Sd} = M_{Sd1} + M_{Sd3}$$

- momento resistente

$$M_{Rd} = M_{Rd1} + M_{Rd3}$$

- armadura tracionada - 1ª consideração

$$A_s = A_{s1} + A_{s3}$$

$$A_s = \frac{M_{Rd1}}{\beta_z d \beta_s f_{yd}} + \frac{M_{Rd3}}{\left(d - \frac{h_f}{2} \right) \beta_s f_{yd}}$$

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd3}}{\left(d - \frac{h_f}{2} \right)} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}}$$

- armadura tracionada - 2ª consideração

$$A_s = A_{s1} + A_{s3}$$

$$A_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{\beta_s f_{yd}} \right) \beta_x + \frac{\alpha_c [(b_f - b_w) h_f] f_{cd}}{\beta_s f_{yd}}$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left\{ \frac{\alpha_c [(b_f - b_w) h_f] f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right\}$$

- condições limites

- momento resistente (Equação 4.21, página 4-16)

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0,8 W_0 f_{ctk,inf} \\ M_{Sd} \end{bmatrix}$$

- dutibilidade (Equação 4.10, página 4-8)

$$\beta_x \leq \beta_{x,dtl} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle \end{cases}$$

- armadura (Equação 4.23 e Equação 4.24, página 4-17)

$$A_s \begin{cases} \geq A_{s,min} \\ \leq A_{s,max} \end{cases}$$

- equações de cálculo com uso de tabelas

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0,8 W_0 f_{ctk,sup} \\ M_{Sd} \end{bmatrix}$$

$$M_{Rd,mesa} = \alpha_c (b_f h_f) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) f_{cd}$$

$$M_{Rd} > M_{Rd,mesa}$$



$M_{Rd} > M_{Rd,mesa} \rightarrow$
cálculo como
seção T

$$M_{Rd3} = \alpha_c \left[(b_f - b_w) h_f \left(d - \frac{h_f}{2} \right) \right] f_{cd}$$

$$M_{Rd1} = M_{Rd} - M_{Rd3}$$

$$\beta_c = \frac{M_{Rd1}}{b_w d^2 f_{cd}} \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \\ \beta_s \end{cases}$$

$$\beta_x \leq \beta_{x,dtl} = \begin{cases} 0,450 & \langle f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \rangle \\ 0,350 & \langle f_{ck} > 50 \text{MPa} \rangle \end{cases}$$

$$y = \beta_y d > h_f$$

Equação 4.32

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd3}}{\left(d - \frac{h_f}{2}\right)} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}} \left\{ \begin{array}{l} \geq A_{s,min} = 0,15\% A_c \\ \leq A_{s,max} = 4\% b_w h \end{array} \right.$$

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left\{ \frac{\alpha_c [(b_f - b_w) h_f] f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right\}$$

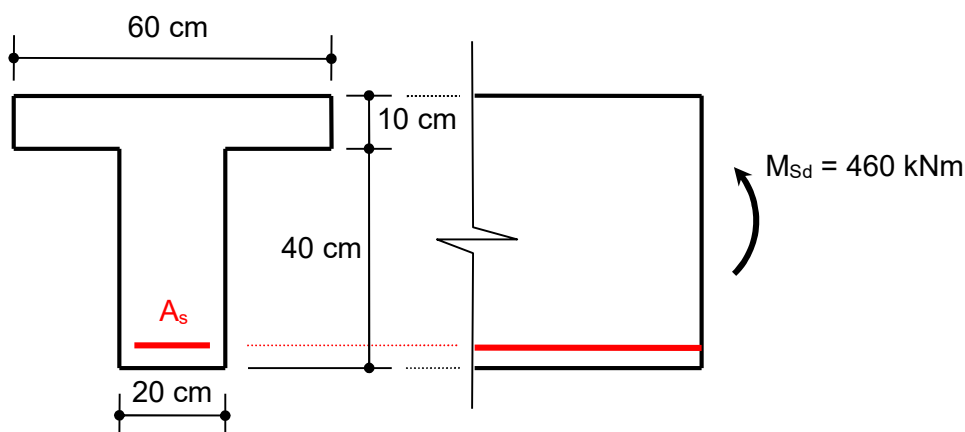
Exemplo 4.5: Determinar a armadura necessária para a viga abaixo indicada, a qual está submetida a um momento fletor solicitante de cálculo (M_{Sd}) igual a 460 kNm.

Dados:

- concreto: C35;
- aço: CA-50;
- armadura transversal: 6,3 mm;
- cobrimento: 3 cm; e
- dimensão máxima do agregado: 19 mm.

Considerar:

- somente solicitações normais (momentos fletores); e
- estado limite último, combinações normais ($\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$).



Solução: A solução do problema consiste na aplicação direta da Equação 4.31 (página 4-37) ou Equação 4.32, com o uso da tabela para concreto C35 e aço CA-50 (página 4-61).

a) Dados - uniformização de unidades (kN e cm)

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} = 3,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\lambda = 0,80 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\alpha_c = 0,85 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$\beta_{x,dli} = 0,45 \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad \langle f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \rangle$$

$$f_{ctk,sup} = 0,39 \times \sqrt[3]{35^2} = 4,17 \text{ MPa} = 0,417 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_c = 1,40 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{3,5}{1,40} = 2,50 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$\gamma_s = 1,15 \quad (\text{ELU - combinação normal})$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$$

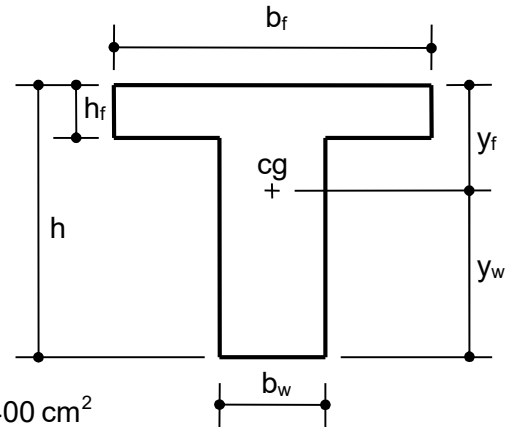
$$b_w = 20 \text{ cm}$$

$$b_f = 60 \text{ cm}$$

$$d = 40 \text{ cm (assumido)}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$h_f = 10 \text{ cm}$$



$$A_c = b_w h + (b_f - b_w) h_f = 20 \times 50 + (60 - 20) \times 10 = 1400 \text{ cm}^2$$

$$y_w = \frac{(b_f h^2) - [(b_f - b_w)(h - h_f)^2]}{2\{[(b_f h) - [(b_f - b_w)(h - h_f)]\}} = \frac{(60 \times 50^2) - [(60 - 20) \times (50 - 10)^2]}{2\{[(60 \times 50) - [(60 - 20) \times (50 - 10)]\}} = 30,71 \text{ cm}$$

$$y_f = h - y_w = 50 - 30,71 = 19,29 \text{ cm}$$

$$I = \left\{ \frac{b_f h^3 - [(b_f - b_w)(h - h_f)^3]}{3} \right\} - A_c y_w^2$$

$$I = \left\{ \frac{60 \times 50^3 - [(60 - 20) \times (50 - 10)^3]}{3} \right\} - 1400 \times 30,71^2 = 326321 \text{ cm}^4$$

$$W_0 = W_{0,w} = \frac{I}{y_w} \Leftarrow \text{fibra mais tracionada (w)}$$

$$W_0 = \frac{326321}{30,71} = 10626 \text{ cm}^3$$

$$M_{Sd,min} = 0,8 W_0 f_{ctk,sup} = 0,8 \times 10626 \times 0,417 = 3544,83 \text{ kNcm}$$

$$M_{Sd} = 460 \text{ kNm} = 46000 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd} = \max \begin{bmatrix} M_{d,min} \\ M_{Sd} \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 3544,83 \\ 46000 \end{bmatrix} = 46000 \text{ kNcm}$$

$$A_{s,min} = 0,15\% A_c = \frac{0,15}{100} \times 1400 = 2,10 \text{ cm}^2$$

$$A_{s,max} = 4\% b_w h = \frac{4}{100} \times 20 \times 50 = 40,00 \text{ cm}^2$$

$$M_{Rd,mesa} = \alpha_c (b_f h_f) \left(d - \frac{h_f}{2} \right) f_{cd} = 0,85 \times (60 \times 10) \times \left(40 - \frac{10}{2} \right) \times 2,50 = 44625 \text{ kNcm}$$

$$\underbrace{M_{Rd}}_{46000} > \underbrace{M_{Rd,mesa}}_{44625} \quad \text{☹️} \quad \longrightarrow \quad \text{cálculo como seção T}$$

b) Momentos resistentes

$$M_{Rd3} = \alpha_c \left[(b_f - b_w) h_f \left(d - \frac{h_f}{2} \right) \right] f_{cd}$$

$$M_{Rd3} = 0,85 \times \left[(60 - 20) \times 10 \times \left(40 - \frac{10}{2} \right) \right] \times 2,50 = 29750 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd1} = M_{Rd} - M_{Rd3} = 46000 - 29750 = 16250 \text{ kNcm}$$

c) Determinação de β_c

$$\beta_c = \frac{M_{Rd1}}{b_w d^2 f_{cd}} = \frac{16250}{20 \times 40^2 \times 2,50} = 0,203 \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{tab} \begin{cases} \beta_x = 0,347 \\ \beta_y = 0,277 \\ \beta_z = 0,861 \\ \beta_s = 1,000 \end{cases}$$

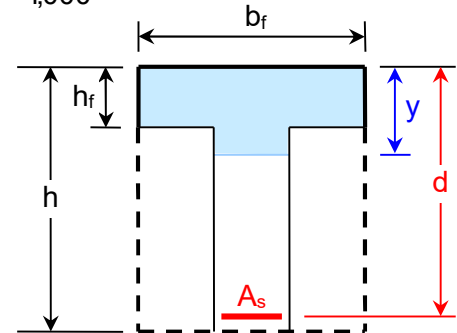
$$\beta_x < \beta_{x,dtl} \quad \text{😊}$$

$\frac{0,347}{0,450}$

$$y = \beta_y d = 0,277 \times 40 = 11,08 \text{ cm}$$

$$y > h_f \quad \text{😊}$$

$\frac{11,08 \text{ cm}}{10,00 \text{ cm}}$

d) Cálculo da armadura A_s

$$A_s = \left[\frac{M_{Rd1}}{\beta_z d} + \frac{M_{Rd3}}{\left(d - \frac{h_f}{2}\right)} \right] \frac{1}{\beta_s f_{yd}} \begin{cases} \geq A_{s,min} \\ \leq A_{s,max} \end{cases}$$

$$A_s = \left[\frac{16250}{0,861 \times 40} + \frac{29750}{\left(40 - \frac{10}{2}\right)} \right] \frac{1}{1,000 \times 43,5} = 30,39 \text{ cm}^2 \begin{cases} \geq 2,10 \text{ cm}^2 \\ \leq 40,00 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad \text{😊}$$

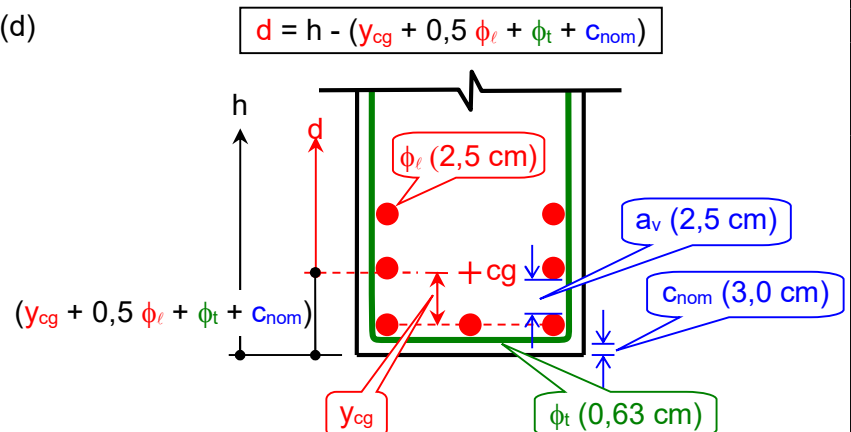
$$A_{s,cal} = 30,39 \text{ cm}^2 \blacktriangleleft$$

$$A_{s,ef} = 7 \phi 25 \text{ mm} = 7 \times \frac{\pi \times 2,5^2}{4} = 34,36 \text{ cm}^2$$

e) Determinação da altura útil (d)

$$y_{cg} < \frac{h}{10} < \frac{50}{10} < 5,0 \text{ cm}$$

$$y_{cg} = \frac{\sum A_{si} \times y_i}{\sum A_{si}}$$



$$b_{nec} = (2 \times 3,0) + (2 \times 0,63) + (5 \times 2,5) = 19,76 \text{ cm} < 20 \text{ cm} \quad \text{😊}$$

cobrimento

estribo

cinco barras
(duas virtuais
entre três reais) b_w

$$y_{cg} = \frac{[3 \times (0,0)] + \left[2 \times \left(\frac{2,5}{2} + 2,5 + \frac{2,5}{2} \right) \right] + \left[2 \times \left(\frac{2,5}{2} + 7,5 + \frac{2,5}{2} \right) \right]}{7} = 4,29 \text{ cm} < 5,0 \text{ cm}$$

$$d = h - \left(y_{cg} + \frac{\phi_l}{2} + \phi_t + c_{nom} \right) = 50 - \left(4,29 + \frac{2,5}{2} + 0,63 + 3,0 \right) = 40,83 \text{ cm}$$

$$\frac{d_{\text{adot}}}{40,00 \text{ cm}} < \frac{d_{\text{cal}}}{40,83 \text{ cm}}$$



armadura mais afastada do centro de gravidade da seção geométrica → não é necessário refazer os cálculos com $d = 40,83 \text{ cm}$

f) Verificação

$$\beta_s = \left(\frac{\lambda \alpha_c b_w d f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right) \beta_x + \left\{ \frac{\alpha_c [(b_f - b_w) h_f] f_{cd}}{A_s f_{yd}} \right\}$$

$$\beta_s = \left(\frac{0,8 \times 0,85 \times 20 \times 40 \times 2,50}{30,39 \times 43,5} \right) \times 0,347 + \left\{ \frac{0,85 \times [(60 - 20) \times 10] \times 2,50}{30,39 \times 43,5} \right\} = 1,000$$



g) Observação

$$\rho_{T,\text{max}} = \frac{A_s + A'_s}{b_w h} \leq 4\%$$

$$\rho_{T,\text{max}} = \frac{34,36}{20 \times 50} = 3,44\%$$

Viga com armadura bastante expressiva, com a taxa de armadura (3,44%) muito próxima do limite (4%). Indica que a viga está com pouca altura em relação ao momento solicitante.

Por outro lado, como a viga é bastante solicitada por momento fletor, o mesmo deverá acontecer com a força cortante. Difícilmente a viga poderá ser detalhada com estribo de 6,3 mm. O uso de estribo de 8 mm já tornaria impossível abrigar 3 barras de 25 mm em uma mesma camada (b_{nec} resultaria em 20,10 cm superior aos 20 cm de b_w).

É conveniente aumentar a altura da viga para, pelo menos, 60 cm.

4.11 Composição de b_f

4.11.1 Conjunto laje-viga

Nas estruturas de concreto armado, as vigas de seção T aparecem naturalmente pois o conjunto laje-viga define este tipo de seção, como mostrado na Figura 4.25.

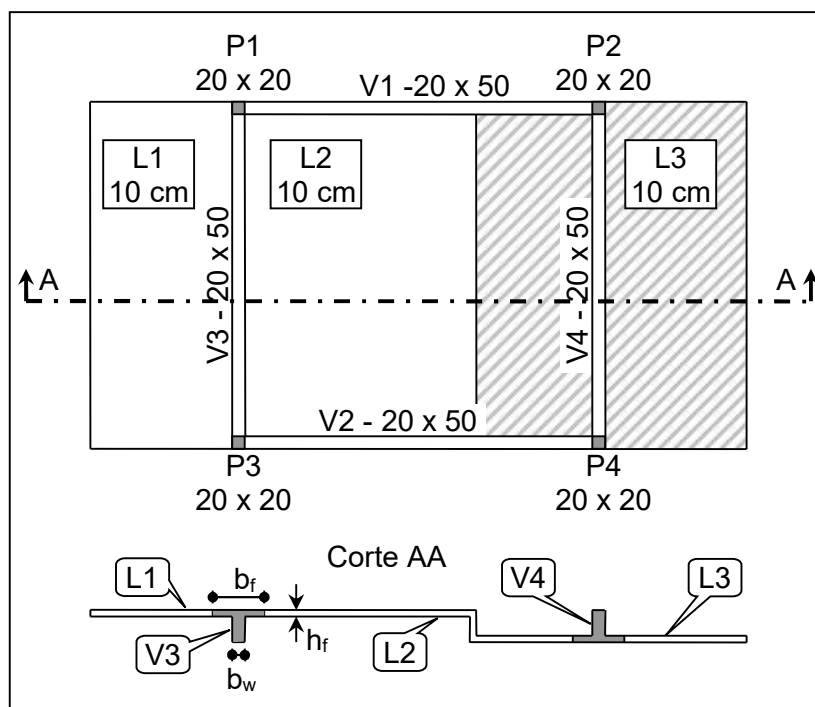


Figura 4.25 - Conjunto laje-viga

Deve ser notado que no dimensionamento da armadura longitudinal (armadura de flexão), a viga de concreto armado composta por nervura (alma) e abas (mesa), como mostrado na

Figura 4.25, só poderá ser considerada como seção T, quando a mesa estiver comprimida. Caso contrário (mesa tracionada), a viga deverá ser considerada como de seção retangular de base b_w .

De modo geral, pode se dizer que a seção T, com a mesa posicionada na parte superior da viga (T em pé), pode ser usada para o dimensionamento da armadura longitudinal positiva (momentos fletores positivos da viga V3 da Figura 4.25).

Eventualmente, em construções com lajes rebaixadas (apoiadas na base da viga), é possível configurar-se seções $\perp$ (T invertido da viga V4 da Figura 4.25). Nestes casos, estas seções poderiam ser usadas no dimensionamento da armadura longitudinal negativa (momentos fletores negativos, se houverem, na viga V4 da Figura 4.25).

4.11.2 Largura colaborante de vigas de seção T

4.11.2.1 Distância entre pontos de momentos fletores nulos

A consideração da largura colaborante da laje associada à viga (Figura 4.25) deve obedecer às prescrições da ABNT NBR 6118.

ABNT NBR 6118, item 14.6.2.2:

“A largura colaborante b_f deve ser dada pela largura da viga b_w acrescida de no máximo 10% da distância a entre pontos de momento fletor nulo, para cada lado da viga em que haja laje colaborante.

A distância a pode ser estimada, em função do comprimento ℓ do tramo considerado, como se apresenta a seguir:

viga simplesmente apoiada: $a = 1,00 \ell$;

viga com momento em uma só extremidade: $a = 0,75 \ell$;

viga com momento nas duas extremidades: $a = 0,60 \ell$;

viga em balanço: $a = 2,00 \ell$.

Alternativamente, o cômputo da distância a pode ser feito ou verificado mediante exame dos diagramas de momentos fletores na estrutura.

No caso de vigas contínuas, permite-se calculá-las com uma largura colaborante única para todas as seções, inclusive nos apoios sob momentos negativos, desde que essa largura seja calculada a partir do trecho de momentos positivos onde a largura resulte mínima.”

Os valores de a podem ser estabelecidos como:

$a = \ell$	⟨viga simplesmente apoiada⟩
$a = 0,75 \ell$	⟨viga com momento em uma só extremidade⟩
$a = 0,60 \ell$	⟨viga com momento nas duas extremidades⟩
$a = 2 \ell$	⟨viga em balanço⟩

Equação 4.33

A Figura 4.26 mostra os valores simplificados de a , como estabelecidos pela ABNT NBR 6118.

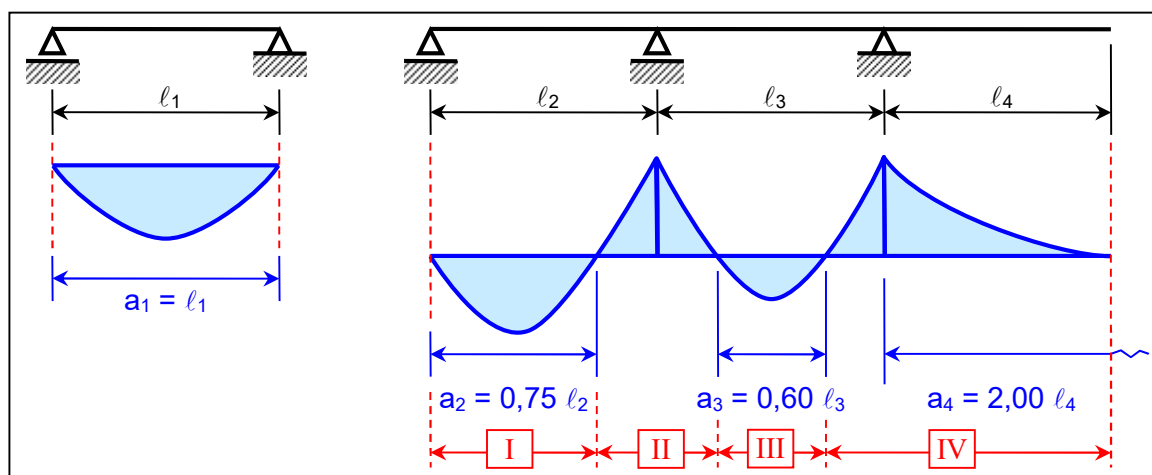


Figura 4.26 - Distância entre pontos de momento fletor nulo

Deve ser observado na Figura 4.26 que para a viga isostática (ℓ_1) só tem sentido o uso de seções T com a mesa posicionada na parte superior da viga (T em pé), pois nesta viga só atuam momentos fletores positivos. Neste caso:

$$a = a_1 = \ell_1$$

Para a viga contínua ($\ell_2 + \ell_3 + \ell_4$), as seções T com a mesa posicionada na parte superior da viga (T em pé) podem ser admitidas nos trechos I e III, onde atuam momentos fletores positivos. As seções $\perp$ com a mesa posicionada na parte inferior da viga (T invertido) podem ser admitidas nos trechos II e IV, onde atuam momentos fletores negativos.

Para o caso em que a viga contínua mostrada na Figura 4.26 tiver, em toda sua extensão, seção transversal em forma de T com a mesa posicionada na parte superior da viga (T em pé), na determinação do valor de b_f (a ser usado no dimensionamento dos momentos fletores positivos dos trechos I e III), deve ser tomado para a o menor dos seguintes valores:

$$a \leq \begin{cases} a_2 = 0,75 \ell_2 \\ a_3 = 0,60 \ell_3 \end{cases}$$

Para o caso em que a viga contínua mostrada na Figura 4.26 tiver, em toda sua extensão, seção transversal em forma de $\perp$ com a mesa posicionada na parte inferior da viga (T invertido), na determinação do valor de b_f (a ser usado no dimensionamento dos momentos fletores negativos dos trechos II e IV), deve ser tomado para a o menor dos seguintes valores:

$$a \leq \begin{cases} 0,25 \ell_2 + 0,20 \ell_3 \\ 0,20 \ell_3 + 2,00 \ell_4 \end{cases}$$

4.11.2.2 Vigas isoladas e painel de vigas

Na determinação de b_f não pode ser apenas considerada a distância a entre os pontos de momento fletor nulo, como apresentado em 4.11.2.1. Algumas disposições decorrentes da própria natureza da viga, ou do conjunto delas, devem ser consideradas, como mostrado na Figura 4.27.

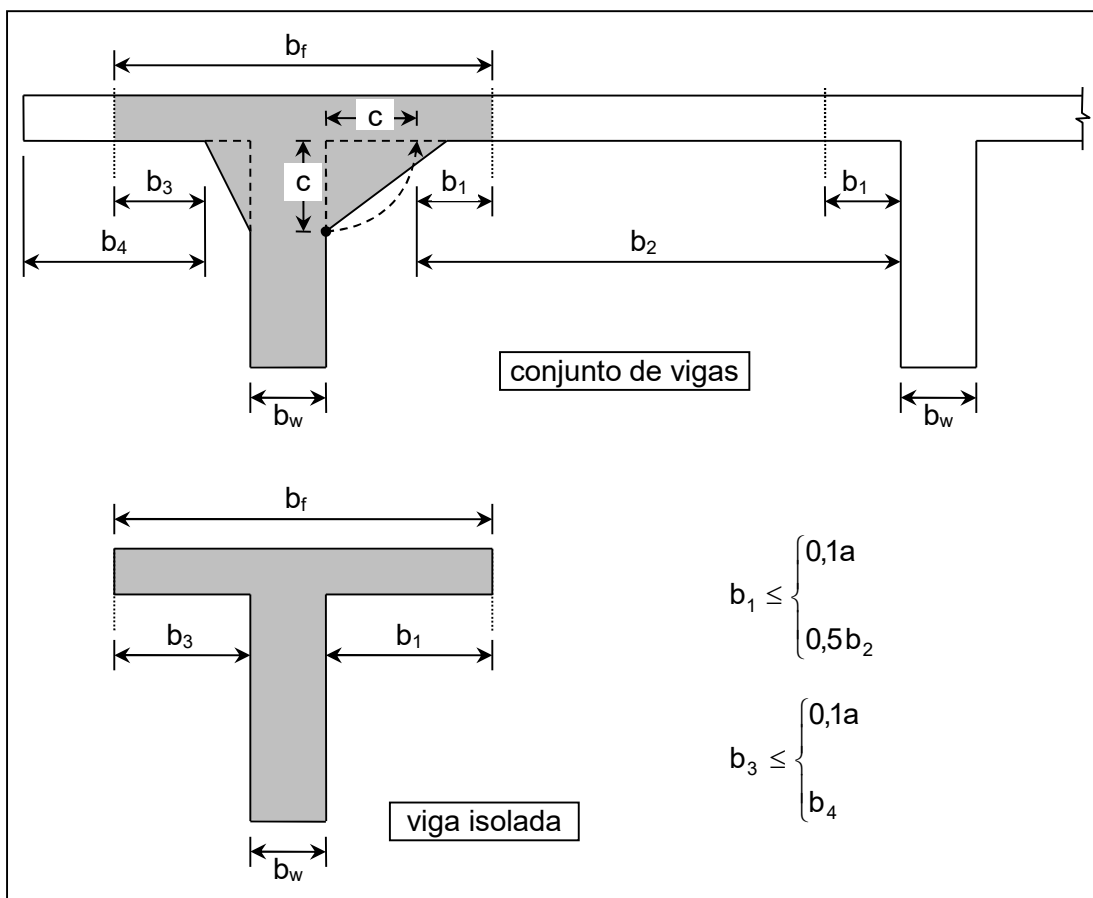


Figura 4.27 - Largura de mesa colaborante

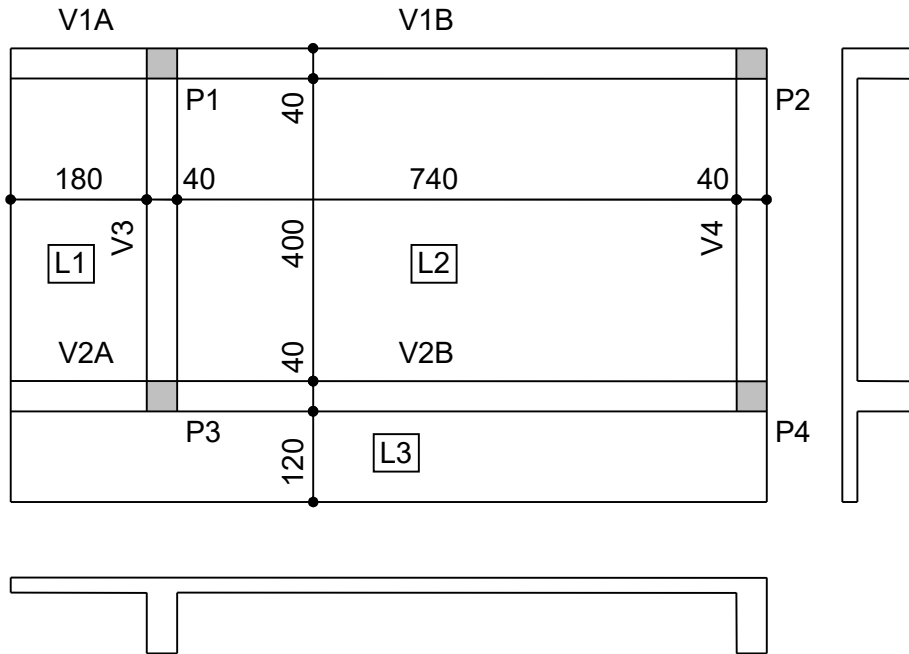
As relações entre os valores de a mostrados na Figura 4.26 e os valores de b_f apresentados na Figura 4.27 correspondem a:

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,1a \\ 0,5b_2 \end{cases} \quad b_3 \leq \begin{cases} 0,1a \\ b_4 \end{cases}$$

Equação 4.34

Exemplo 4.6: Determinar o valor de b_f para a viga V2.

Considerar vigas simplesmente apoiadas nos pilares.

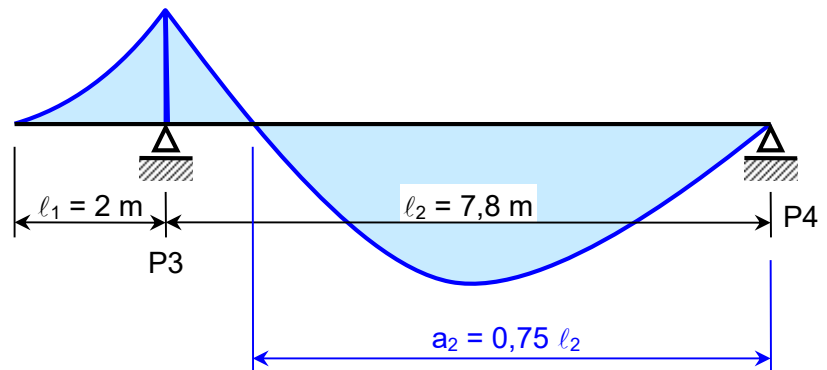


Solução: A solução do problema consiste na aplicação direta da Equação 4.33 e da Equação 4.34.

a) Definição de a (vista longitudinal de V2)

$$a = a_2 = 0,75 \ell_2$$

$$a = 0,75 \times 780 = 585 \text{ cm}$$



b) Definição de b_f (seção transversal de V2)

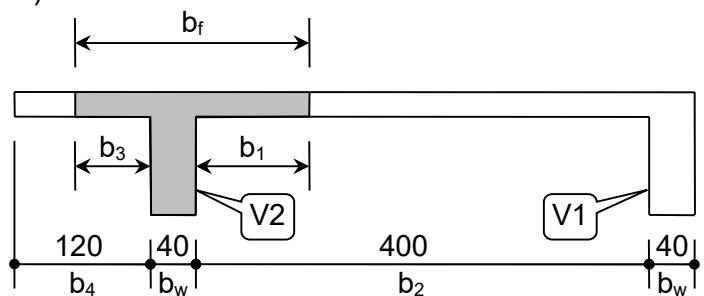
$$b_2 = 400 \text{ cm}$$

$$b_4 = 120 \text{ cm}$$

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,1a \\ 0,5b_2 \end{cases}$$

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,1 \times 585 = 58,5 \text{ cm} \Leftarrow \\ 0,5b_2 = 0,5 \times 400 = 200 \text{ cm} \end{cases}$$

$$b_3 \leq \begin{cases} 0,1a \\ b_4 \end{cases}$$



$$b_3 \leq \begin{cases} 0,1 \times 585 = 58,5 \text{ cm} \Leftarrow \\ 120 \text{ cm} \end{cases}$$

$$b_f = b_3 + b_w + b_1$$

$$b_f = 58,5 + 40 + 58,5 = 157 \text{ cm}$$

$$b_f = 157 \text{ cm} \blacktriangleleft$$

4.12 Disposições construtivas

4.12.1 Dimensões limites

As vigas de concreto armado, de modo geral, não devem possuir largura inferior a 12 cm.

ABNT NBR 6118, item 13.2.2:

"A seção transversal das vigas não deve apresentar largura menor que 12 cm e das vigas-parede, menor que 15 cm. Estes limites podem ser reduzidos, respeitado um mínimo absoluto de 10 cm em caso excepcionais, sendo obrigatoriamente respeitadas as seguintes condições:

- *alojamento das armaduras e suas interferências com as armaduras de outros elementos estruturais, respeitando os espaçamentos e coberturas estabelecidos nesta Norma;*
- *lançamento e vibração do concreto de acordo com a ABNT NBR 14931."*

4.12.2 Concentração de armaduras

Os esforços nas armaduras, tracionadas ou comprimidas, podem ser considerados concentrados no centro de gravidade correspondente (Figura 4.28), se a distância deste centro de gravidade ao centro da armadura mais afastada, medida normalmente à linha neutra, for menor que 10% h (ABNT NBR 6118 - 17.2.4.1).

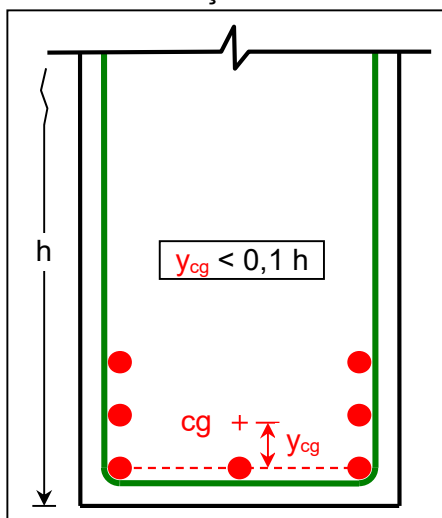


Figura 4.28 - Centro de gravidade de armaduras

4.12.3 Armadura de tração nas seções de apoio

Segundo o item 18.3.2.4 da ABNT NBR 6118, as armaduras longitudinais positivas de vigas devem ser prolongadas até os apoios (Figura 4.29), de tal forma que:

- $A_{s,apoio} \geq 0,33 A_{s,v\tilde{a}o}$, se M_{apoio} for nulo ou negativo de valor absoluto $|M_{apoio}| \leq 0,5 M_{v\tilde{a}o}$; ou
- $A_{s,apoio} \geq 0,25 A_{s,v\tilde{a}o}$, se M_{apoio} for negativo de valor absoluto $|M_{apoio}| > 0,5 M_{v\tilde{a}o}$.

No caso de apoios intermediários, onde não haja a possibilidade de ocorrência de momentos positivos, as armaduras provenientes do meio do vão deverão se estender, no mínimo, 10 ϕ além da face do apoio (item 18.3.2.4.1 da ABNT NBR 6118).

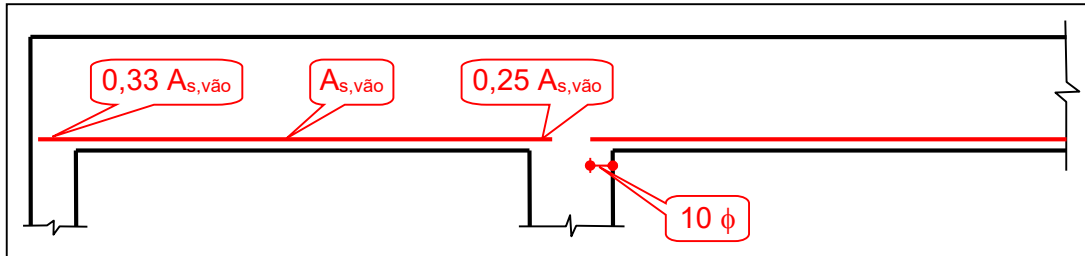
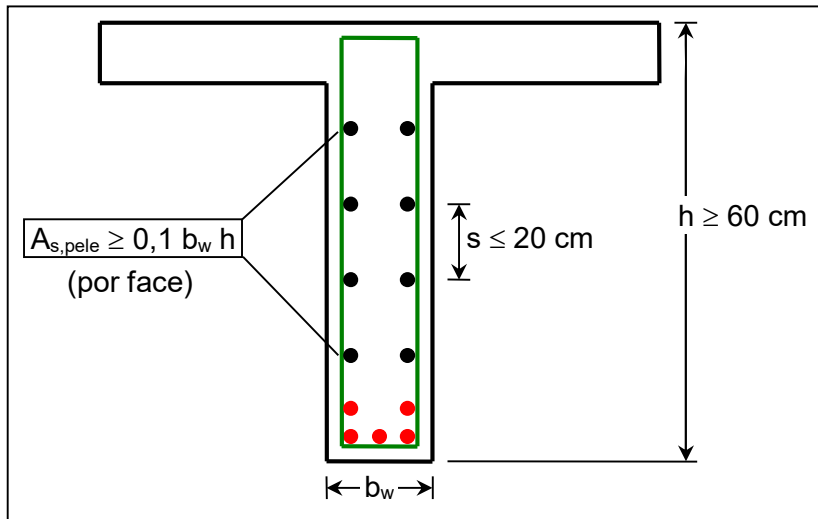


Figura 4.29 - Prolongamento de armadura positiva

4.12.4 Armadura de pele

A ABNT NBR 6118 - 17.3.5.2.3 indica que a mínima armadura lateral deve ser 0,10% $A_{c,alma}$



em cada face da alma da viga e composta por barras de CA-50 ou CA-60, com espaçamentos não maior que 20 cm e devidamente ancorada nos apoios, não sendo necessária uma armadura superior a 5 cm²/m por face. (Figura 4.30).

Figura 4.30 - Armadura de pele

Em vigas com altura igual ou inferior a 60 cm, pode ser dispensada utilização da armadura de pele.

4.13 Tabelas de Flexão Simples