

# 1 INTRODUÇÃO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

## 1.1 INTRODUÇÃO

A resistência dos materiais é o ramo da mecânica que estuda as relações entre cargas externas aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças internas que atuam dentro do corpo, abrangendo também o cálculo das deformações do corpo e o estudo da sua estabilidade, quando submetido a solicitações externas (HIBBELER, 2004).

Em resumo, é o capítulo da Mecânica dos Corpos Sólidos no qual se estuda o equilíbrio dos referidos corpos, considerando os efeitos internos, produzidos pela ação das forças externas.

A origem da resistência dos materiais remonta ao início do século XVII, época em que Galileu realizou experiências para estudar os efeitos de cargas em hastes e vigas feitas de vários materiais. No entanto, para a compreensão adequada dos fenômenos envolvidos, foi necessário estabelecer descrições experimentais precisas das propriedades mecânicas de materiais. Os métodos para tais descrições foram consideravelmente melhorados no início do século XVIII. Na época, estudos foram realizados, principalmente na França, baseados em aplicações da mecânica a corpos materiais, denominando-se o estudo de Resistência dos Materiais. Atualmente, no entanto, refere-se a esses estudos como mecânica dos corpos deformáveis ou simplesmente mecânica dos materiais (HIBBELER, 2004).

Entre os diversos estudiosos e pesquisadores que colaboraram com a formação da Resistência dos Materiais, destacam-se: Galileu, Saint Venant, Bernoulli, Navier, Hooke, Poisson, Cauchy, Euler, Castigliano, Tresca, Von Mises, Lamé, entre outros.

## 1.2 OBJETIVOS

Os objetivos da Resistência dos Materiais são:

- Determinação dos esforços;
- Determinação das tensões e das deformações a que estão sujeitos os corpos sólidos devido à ação dos esforços atuantes;
- Equilíbrio de um corpo deformável;
- Verificação da segurança;
- Dimensionamento.

## 1.3 PEÇA OU ELEMENTO RESISTENTE

Peça ou elemento resistente é todo corpo capaz de receber e transmitir forças. O conjunto de elementos resistentes de uma construção ou máquina denomina-se estrutura.

Para efeito de estudo, podemos classificar os elementos resistentes em:

- a) Barras: aqueles que têm uma das dimensões bem superior às demais. Ex. tirantes, escoras, pilares e vigas;
- b) Placas e chapas: aqueles que possuem uma dimensão muito pequena em relação às outras duas. Caso as cargas atuantes sejam aplicadas perpendicularmente ao seu plano, denomina-se placa. Se as cargas atuarem em seu próprio plano médio, denomina-se chapa. Ex. laje, viga parede;
- c) Cascas: são elementos que possuem pequena espessura em relação à área da superfície média, que é curva. Ex. cúpula;
- d) Blocos: são elementos em que não há uma dimensão predominante em relação às outras.

## 1.4 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

As hipóteses simplificadoras são adotadas, em um nível inicial, para o fácil entendimento e simples implementação da teoria referente aos tipos de materiais a elas associados.

### 1.4.1 HIPÓTESES RELATIVAS AO MATERIAL

Apenas materiais com certas características são estudados nessa fase introdutória da resistência dos materiais. Esses materiais devem satisfazer os seguintes requisitos:

- Isotrópicos: possuem as mesmas respostas mecânicas quando solicitados em qualquer direção;
- Homogêneos: em uma direção, possuem as mesmas propriedades em qualquer ponto;
- Contínuos: a matéria é distribuída continuamente no volume do corpo;
- Coesos: significa que todas as suas partes estão muito bem unidas, sem a presença de trincas, separações ou falhas;
- Linearidade: possuem solicitações que apenas façam com que o material trabalhe no regime elástico linear.

De fato são poucos os materiais que apresentam todos os requisitos acima (um exemplo é o aço). No entanto, as hipóteses simplificadoras podem ser utilizadas em materiais que não se incluem nesses requisitos, utilizando os conceitos definidos na sequência como aproximações de cálculo (um exemplo é o concreto).

### 1.4.2 HIPÓTESES RELATIVAS AOS DESLOCAMENTOS

As equações desenvolvidas são válidas para corpos que sofrem pequenos deslocamentos, se comparadas com suas dimensões.

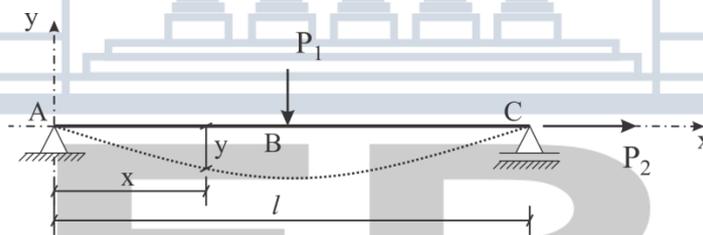


Figura 1.1: Deslocamentos verticais em uma viga simplesmente apoiada.

No caso da peça mostrada na Figura 1.1, caso os deslocamentos  $y$  dos pontos de seu eixo longitudinal forem grandes, os momentos  $P_2$  poderão ser grandes, se comparados com os momentos da carga transversal  $P_1$ . Sendo assim, a hipótese de pequenos deslocamentos não é válida.

Considerando a hipótese dos pequenos deslocamentos, as equações da Resistência dos Materiais, poderão ser deduzidas a partir do equilíbrio dos corpos indeformados, ou seja, em suas dimensões e posição anterior à aplicação das cargas.

## 1.5 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL

“Toda parte de um sólido em equilíbrio, também está em equilíbrio e à qual se aplicam as equações da estática.”

O método das seções é uma consequência desse princípio. Esse método é utilizado para a determinação dos esforços internos resultantes que atuam sobre a superfície seccionada do corpo.

Através das equações de equilíbrio  $\sum F = 0$  e  $\sum M = 0$ , calculam-se as resultantes dos esforços internos. A variação dessas ações nessa seção é indeterminada e para se ter uma noção mais precisa, é necessário estudar as peças deformadas. As equações de equilíbrio devem ser satisfeitas a fim de impedir que o corpo se translate com movimento acelerado e que tenha rotação, em outras palavras, para que sofra um movimento de corpo rígido.

O impedimento desse movimento acelerado é feito através de apoios inseridos em certas posições, conectando o

corpo a um elemento externo. Os tipos mais comuns de apoio no plano, ilustrados na Figura 1.2, são apoios simples, apenas uma incógnita, apoios rotulados, duas incógnitas e o engastamento, três incógnitas. Em um sistema tridimensional, os mesmos tipos de apoio ocorrem, no entanto, em alguns deles existe o acréscimo de algumas incógnitas. Por exemplo, o engastamento tridimensional possui seis incógnitas, três forças em x, y e z, e três momentos, em torno de x, y e z.

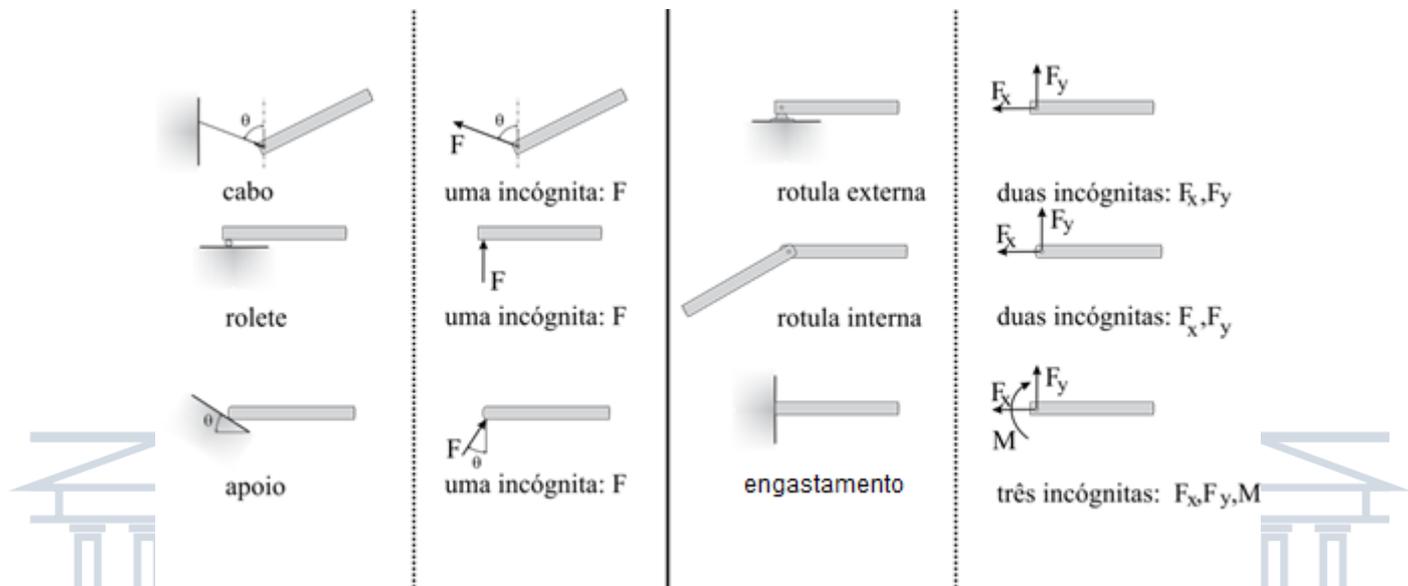


Figura 1.2: Apoios no plano.

A maneira mais fácil e usual de se observar os esforços externos aplicados a um corpo e os seus esforços internos resultantes é através do diagrama de corpo livre.

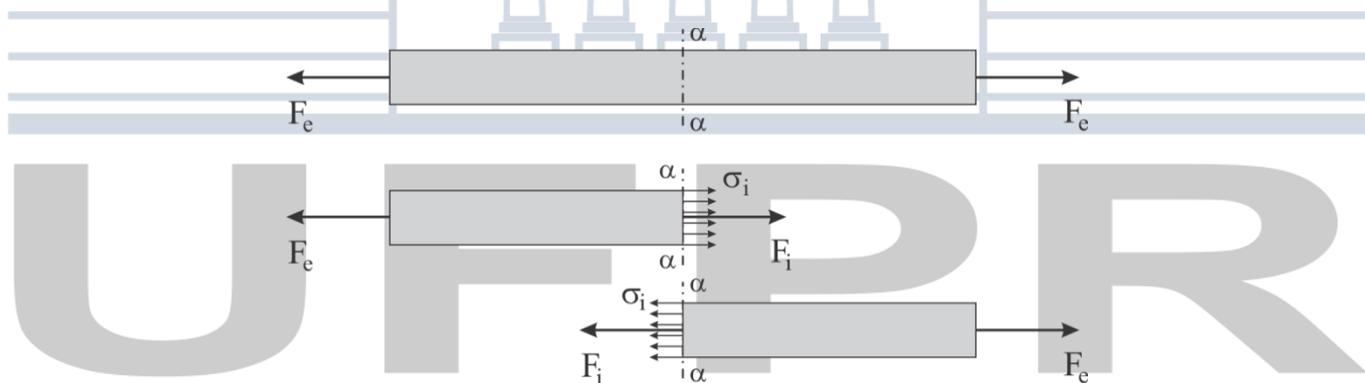
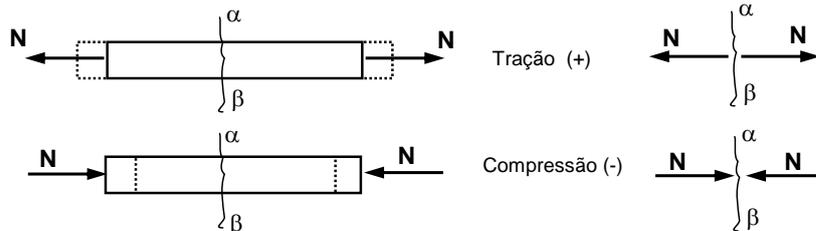


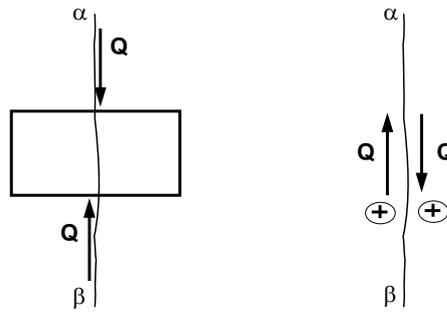
Figura 1.3: Método das Seções (diagrama de corpo livre ilustrando as tensões internas  $\sigma_i$ , os esforços internos normais  $F_i$ ).

Em um corpo sólido são definidos quatro tipos diferentes de esforços internos:

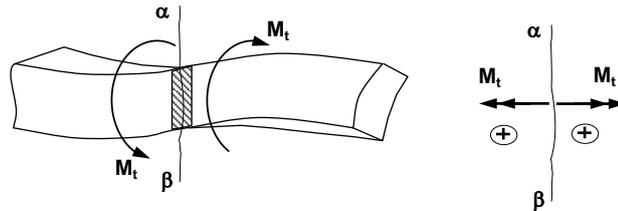
- Força Normal – N: força que atua perpendicularmente à área. Sempre aparece quando existam esforços externos que tendem a empurrar ou puxar o corpo;



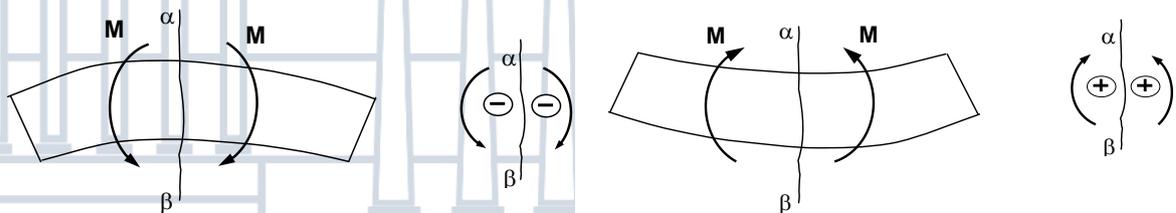
- Força de Cisalhamento – V: localiza-se no plano da área e é criada quando esforços externos tendem a provocar o deslizamento das duas partes do corpo, uma sobre a outra;



- Momento Torçor ou Torque – T: esse efeito é criado quando os esforços externos tendem a torcer uma parte do corpo em relação à outra;



- Momento Fletor – M: é provocado pelos esforços externos que tendem a fletir o corpo em relação ao eixo localizado no plano da área.



Cada um dos esforços internos segue uma convenção de sinais para cada lado da seção.

## 1.6 CLASSIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS

Os esforços são classificados basicamente de acordo com a sua localização no corpo analisado, podendo ser externos ou internos. Os esforços externos podem ser de dois tipos distintos, ativo que se refere às cargas aplicadas, e reativo as reações nos apoios. Os internos se subdividem em resultantes e tensões. As tensões são as forças internas no corpo subdivididas por todo o seu volume e existem apenas quando o corpo está sendo solicitado por algum esforço externo, seja uma carga ou uma reação.

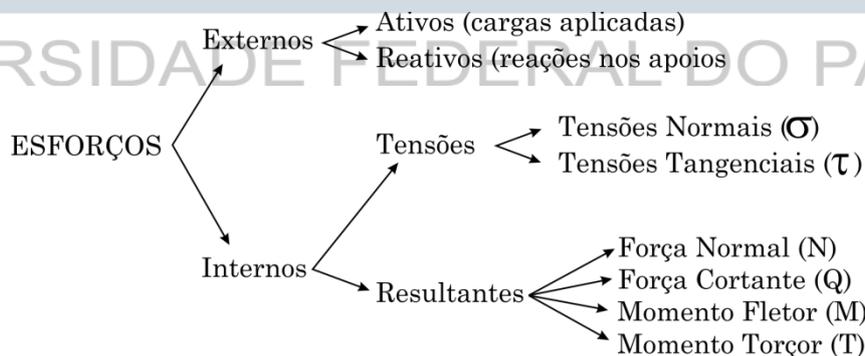


Figura 1.4: Classificação dos esforços.

As resultantes, como o próprio nome sugere, são representações das tensões internas aplicadas no centro de gravidade da respectiva área do diagrama de tensões. De uma forma geral, os esforços são classificados de acordo com a Figura 1.4.

### 1.6.1 ESFORÇOS EXTERNOS

Os esforços externos reativos são classificados em função do tipo de apoio utilizado para restringir o movimento de corpo rígido, sua classificação pode ser feita, de uma forma básica, de acordo com a Figura 1.2.

Os esforços ativos podem ser classificados de acordo com a área onde atuam, podendo ser concentrados ou distribuídos, o modo como atuam, podendo ser relativos ao tempo ou relativos ao tempo e ao espaço e ainda quanto a sua origem, podendo ser estáticos, dinâmicos, repetidos ou do material. A Figura 1.5 ilustra uma classificação dos esforços ativos.

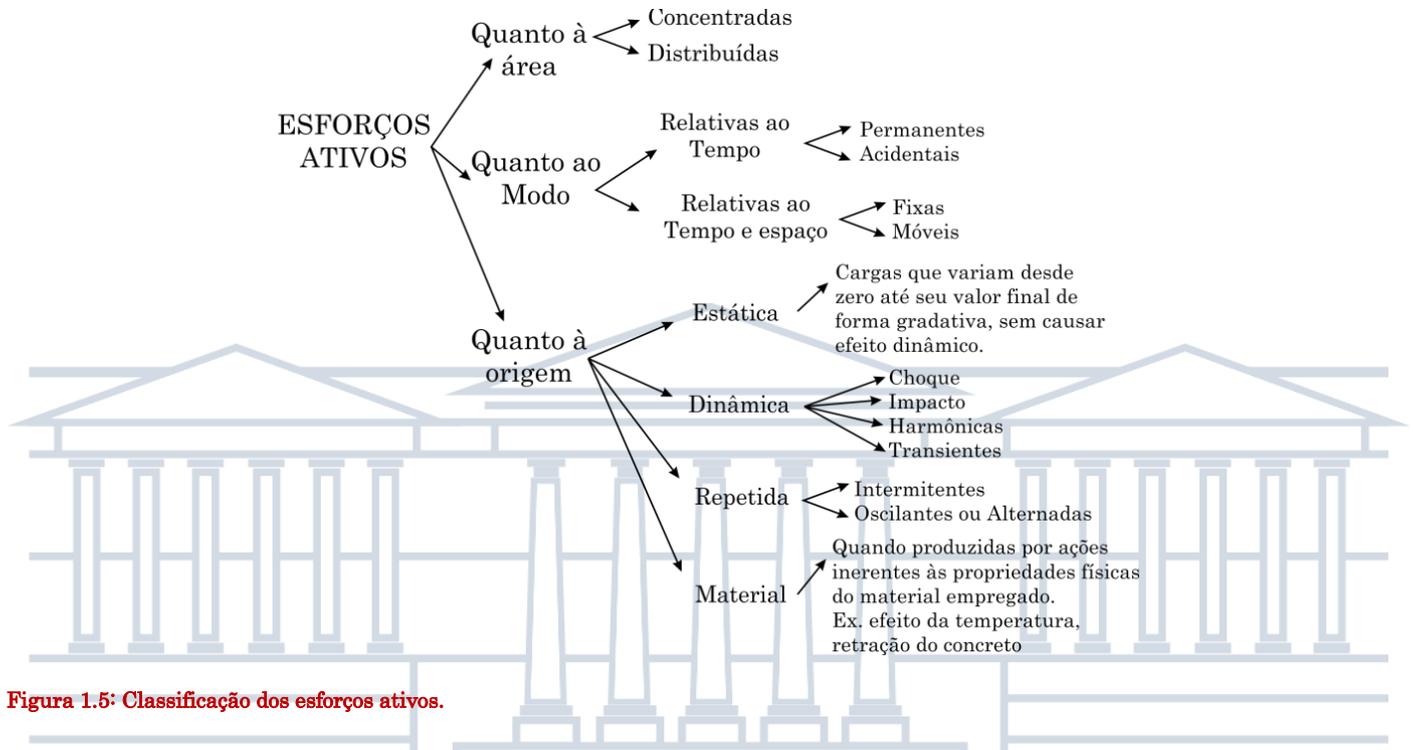


Figura 1.5: Classificação dos esforços ativos.

## 1.6.2 ESFORÇOS INTERNOS

Os esforços internos desenvolvidos no corpo sólido podem ser simplificados para ações resultantes. Para tal, é importante a definição de um plano que secciona o corpo, um sistema de coordenadas e uma convenção de sinais definida de uma forma coerente para determinar os sentidos dos esforços de uma maneira equivalente nas duas faces da seção do corpo.

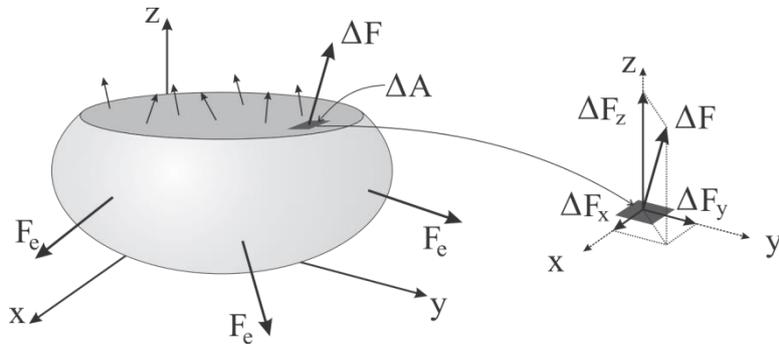
Os esforços internos, como já comentado, atuam em determinados pontos da área de seção transversal, representando os efeitos resultantes da distribuição da força que atua na área seccionada. A determinação dessa distribuição de forças é de suma importância na resistência dos materiais e, para tal, é necessário se estabelecer o conceito de tensão.

## 1.7 TENSÃO

Tensão é uma medida das forças internas de um corpo deformável. Quantitativamente, é a medida da força por unidade de área em uma superfície do corpo onde existam forças internas.

Considere que a área seccionada seja subdividida em áreas muito pequenas, como por exemplo, a área  $\Delta A$  mostrada em escuro na Figura 1.6.

Uma força típica finita muito pequena  $\Delta F$  atua sobre essa área  $\Delta A$ . Essa força, como todas as demais, pode ser decomposta em componentes de acordo com o sistema de referência adotado. No caso, são três componentes nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , sendo respectivamente  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$  e  $\Delta F_z$ . As componentes  $\Delta F_x$  e  $\Delta F_y$  são tangenciais à área e a componente  $\Delta F_z$  é normal. Fazendo-se com que a área  $\Delta A$  tenda a zero, a força  $\Delta F$  e suas componentes também tenderão a zero. Entretanto, a relação entre a força e a área tende para um limite finito. Essa relação é chamada de tensão.



**Figura 1.6: Forças internas em uma seção qualquer do corpo.**

A intensidade da força, ou força por unidade de área, que atua no sentido perpendicular a área  $\Delta A$ , é definida como tensão normal,  $\sigma$ . Como a componente  $\Delta F_z$  é normal à área:

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA} \quad \text{Equação 1.1}$$

Se a força normal puxa o elemento de área, conforme ilustrado na Figura 1.6, ela é denominada tensão de tração. Se ela empurra o elemento, é denominada tensão de compressão.

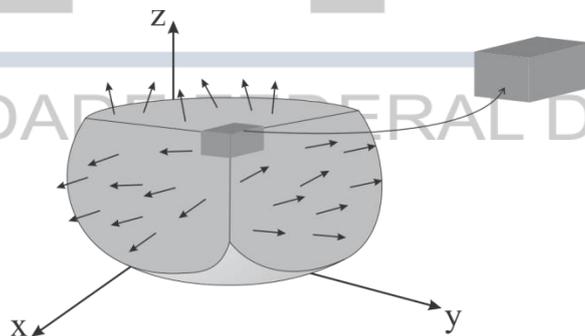
As forças por unidade de área que atuam no sentido tangencial à área  $\Delta A$ , são denominadas tensões de cisalhamento,  $\tau$ . As componentes da tensão de cisalhamento são:

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA}$$

$$\tau_{yz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA} \quad \text{Equação 1.2}$$

Observe que um dos índices é utilizado para indicar a direção normal à área e o outro índice indica a direção da força de cisalhamento. A tensão é sempre uma quantidade vetorial, pois possui intensidade, direção e sentido.

Caso o corpo também seja seccionado por planos paralelos ao plano  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$ , pode-se então extrair um elemento cúbico do corpo, conforme a Figura 1.7, o qual terá o volume tendendo à zero.



**Figura 1.7: Extração do elemento cúbico do corpo.**

Esse elemento representa o estado de tensões que atua em torno do ponto de interseção dos planos cortantes.

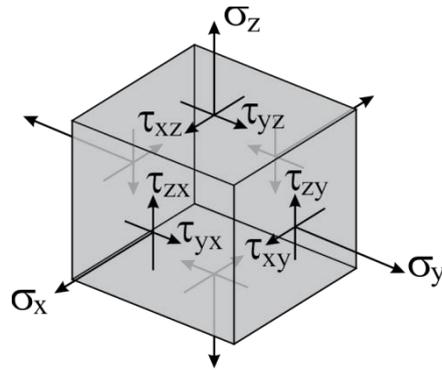


Figura 1.8: Estado de tensões tridimensionais para o elemento cúbico infinitesimal.

Esse estado de tensões, ilustrado pela Figura 1.8, é caracterizado pelas três componentes normais e as seis componentes de cisalhamento, duas em cada seção, que atuam em cada face do elemento cúbico. Essas componentes definem o estado de tensões apenas para o elemento cúbico orientado ao longo dos eixos x, y e z. Caso tivesse sido extraído por planos não paralelos aos planos x-z, x-y e y-z, o estado de tensões seria definido por meio de um conjunto diferente de componentes.

Após conhecido o conceito de tensão, pode-se retomar a discussão anterior e definir os esforços resultantes das tensões internas do corpo. Observe que a força  $\Delta F$  na Figura 1.6 foi decomposta em três componentes de força nos sentidos dos eixos x, y e z, e essas componentes foram utilizadas para calcularmos as tensões normais e as de cisalhamento para o plano que secciona o corpo sólido em questão. De uma forma inversa, se conhecêssemos o valor das tensões, poderíamos encontrar os esforços resultantes dessas tensões. No entanto, as resultantes tensões internas seriam seis, o esforço normal, dois cortantes, dois momentos fletores e o momento torçor. Essas resultantes associadas ao plano xy são obtidas de acordo com a Equação 1.3.

$$N_z = \int_A \sigma_z dA \quad T_z = \int_A (\tau_{yz} \cdot x - \tau_{xz} \cdot y) dA$$

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA \quad M_x = \int_A \sigma_z \cdot y dA$$

$$Q_y = \int_A \tau_{yz} dA \quad M_y = \int_A \sigma_z \cdot x dA$$

Equação 1.3

O esforço normal e os esforços cortantes relacionam-se diretamente com as tensões normal e cisalhante do plano em questão.

## 1.8 DEFORMAÇÃO

Quando uma força é aplicada a um corpo, tende a mudar a forma e o tamanho dele. Tais mudanças são denominadas deformações e podem ser perfeitamente visíveis ou praticamente imperceptíveis sem a utilização de equipamentos de medições precisas.

As medições de deformação são feitas, na prática, por meio de experimentos e, uma vez obtidos seus valores, é possível relacioná-los às cargas aplicadas ou às tensões que atuam no interior do corpo. Na teoria, seu conceito será apresentado por meio de mudanças no comprimentos de segmentos de reta do corpo e mudanças dos ângulos entre eles. O alongamento ou a contração de um segmento de reta de um corpo por unidade de comprimento é denominado deformação normal. Considere a reta AB da Figura 1.9, contida no interior do corpo sem deformação.

A reta localiza-se ao longo do eixo n e tem comprimento original de  $\Delta s$ . Após a deformação, os pontos A e B são deslocados para as posições A' e B', respectivamente, e a reta torna-se curva, tendo um comprimento de  $\Delta s'$ . A mudança de comprimento da reta, portanto, é  $\Delta \delta = \Delta s' - \Delta s$ .

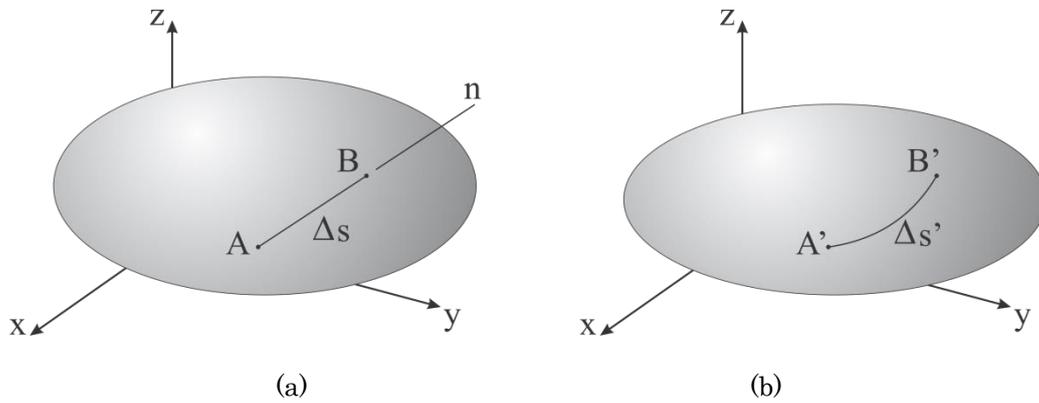


Figura 1.9: Corpo sem deformação (a) e corpo deformado (b), deformação normal.

Como a deformação normal média é definida pelo símbolo  $\epsilon_{med}$ , então se pode escrever:

$$\epsilon_{med} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \frac{\Delta \delta}{\Delta s} \quad \text{Equação 1.4}$$

A posição dos pontos B e A é escolhida de modo que o ponto B escolhido esteja muito próximo de A, fazendo com que  $\Delta s \rightarrow 0$ . A consequência disso é que também o ponto B', após a deformação, esteja muito próximo de A', de modo que  $\Delta s' \rightarrow 0$ . No limite, a deformação normal na direção n é:

$$\epsilon = \lim_{B \rightarrow A \text{ eixo } n} \frac{\Delta \delta}{\Delta s} = \frac{d\delta}{ds} \quad \text{Equação 1.5}$$

Quando  $\epsilon$  é positivo, a reta inicial alonga-se, quando é negativo, a reta contrai-se. Se for conhecida a deformação é possível determinar o comprimento da reta deformada através da Equação 1.6.

$$\Delta s' \approx (1 + \epsilon)\Delta s \quad \text{Equação 1.6}$$

A deformação é uma grandeza adimensional, fato causado por ser a relação entre dois comprimentos. Apesar disso, é fato comum expressá-la em razão de unidades de comprimento, como por exemplo mm/mm (milímetro/milímetro).

Sejam agora, dois segmentos de reta AB e AC, com origem no mesmo ponto A e comprimento tendendo a zero, originalmente perpendiculares entre si, direcionados ao longo dos eixos t e n. A mudança de ângulo ocorrida entre os dois segmentos após a aplicação de um carregamento é chamada de deformação por cisalhamento.

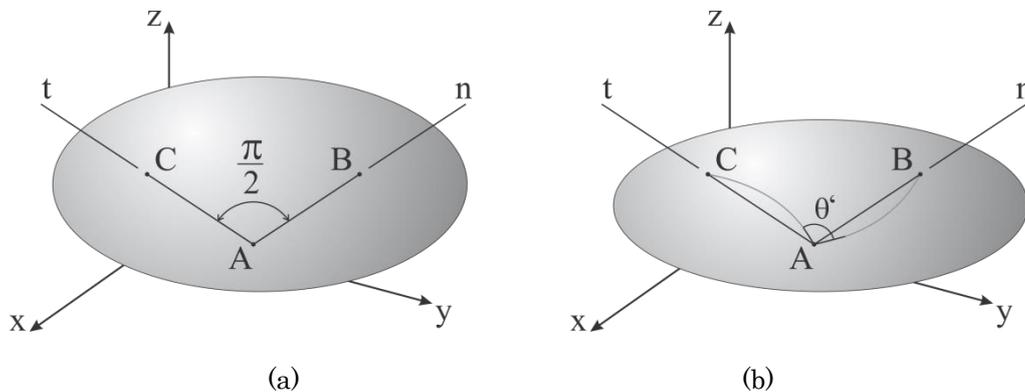


Figura 1.10: Corpo sem deformação (a) e corpo deformado (b), deformação por cisalhamento.

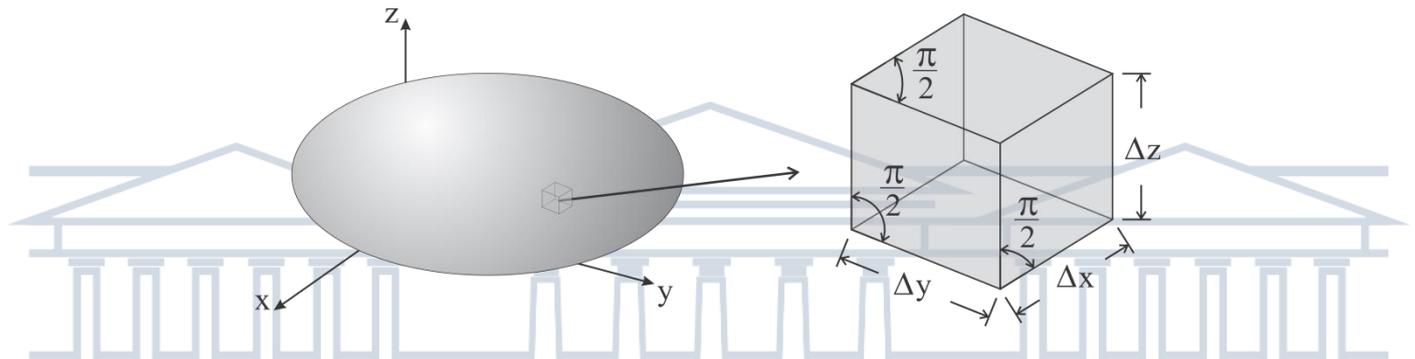
Esse ângulo é designado por  $\gamma$  e medido em radianos (rad). Após a deformação, as extremidades das retas são

deslocadas e as próprias retas se tornam curvas, de modo que o ângulo entre elas em A é  $\theta'$ , Figura 1.10. Portanto, define-se a deformação por cisalhamento no ponto A associado aos eixos n e t como:

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \rightarrow A \text{ eixo } n \\ C \rightarrow A \text{ eixo } t}} \theta' \quad \text{Equação 1.7}$$

Observe que, se  $\theta'$  é menor que  $\pi/2$ , a deformação por cisalhamento é positiva, se  $\theta'$  é maior que  $\pi/2$ , a deformação por cisalhamento é negativa.

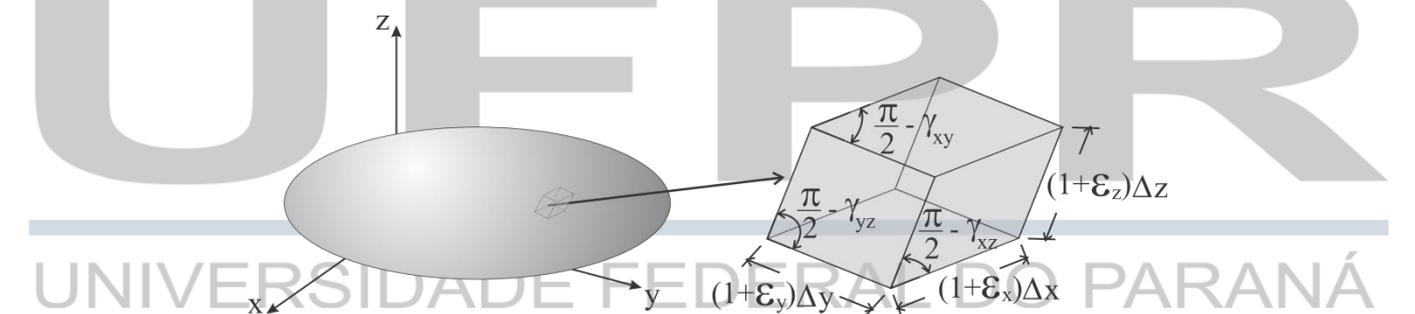
Da mesma forma que foi utilizada nas definições de tensão, imagine agora o corpo subdividido em infinitos pequenos pedaços, conforme a Figura 1.11.



**Figura 1.11:** Corpo subdividido em infinitos pequenos pedaços, antes da deformação.

Antes da deformação, esse elemento é retangular, possuindo dimensões  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ . Como estamos supondo suas dimensões muito pequenas, após a deformação esse elemento assumirá a forma de um paralelepípedo, conforme a Figura 1.12, uma vez que segmentos de reta muito pequenos permanecem aproximadamente retos após a deformação.

O formato deformado é atingido considerando-se primeiro como a deformação normal muda os comprimentos dos lados do elemento retangular e, depois, como a deformação por cisalhamento muda os ângulos de cada lado.



**Figura 1.12:** Elemento infinitesimal do corpo após a deformação.

Portanto, usando a Equação 1.6, em relação aos eixos x, y e z, tem-se que os comprimentos aproximados dos lados do paralelepípedo após a deformação são:

$$\begin{aligned} \Delta x' &\approx (1 + \epsilon_x)\Delta x \\ \Delta y' &\approx (1 + \epsilon_y)\Delta y \\ \Delta z' &\approx (1 + \epsilon_z)\Delta z \end{aligned} \quad \text{Equação 1.8}$$

Os ângulos resultantes aproximados entre os lados são:

$$\theta'_{xy} \approx \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$$
$$\theta'_{yz} \approx \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz}$$
$$\theta'_{xz} \approx \frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}$$

Equação 1.9

Observe que, as deformações normais provocam mudança de volume do elemento retangular, enquanto deformações por cisalhamento provocam mudança no seu formato. Naturalmente, ambos os efeitos ocorrem simultaneamente durante a deformação.

