

7 ELEMENTOS SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA

Elementos estruturais submetidos à flexão composta, no caso mais específico de flexocompressão, são denominados vigas-colunas.

Peças estruturais perfeitamente retilíneas com cargas perfeitamente centradas não existem na prática. As colunas apresentam imperfeições construtivas e as cargas são aplicadas com alguma excentricidade. Entretanto, para uma coluna com carga teoricamente centrada, esses efeitos, se limitados às tolerâncias de norma, estão considerados na tensão resistente com efeito de flambagem f_c , e a coluna pode ser dimensionada para compressão centrada.

Existem casos em que a carga paralela ao eixo da barra atua com excentricidade de maior importância do que as devidas a defeitos construtivos, como por exemplo, colunas ou escoras sujeitas a cargas transversais, colunas com cargas excêntricas, colunas pertencentes a pórticos, etc. O dimensionamento se faz levando em conta o momento fletor e o esforço normal, verificando a flambagem sob o efeito das duas solicitações.

Dois aspectos devem ser abordados no dimensionamento de vigas-coluna:

- Resistência das seções;
- Determinação dos esforços solicitantes decorrentes do processo de flambagem (efeitos de segunda ordem).

7.1 RESISTÊNCIA DA SEÇÃO

Aplica-se o princípio da superposição dos efeitos para combinar as tensões normais σ_N e σ_M oriundas do esforço normal e do momento fletor, respectivamente, atuando no regime elástico. O critério de limite de resistência é baseado no início da plastificação e resulta na equação:

$$\sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = f_y \quad \text{Equação 7.1}$$

Na qual f_y é a tensão de escoamento do aço e W o módulo de resistência elástico. Dividindo a Equação 7.1 por f_y , chega-se a:

$$\frac{N}{N_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad \text{Equação 7.2}$$

Onde N_y representam a força normal limite do regime elástico e M_y representa o momento limite do regime elástico, sendo dados por:

$$N_y = Af_y \quad \text{e} \quad M_y = Wf_y \quad \text{Equação 7.3}$$

Se for permitida a plastificação total da seção, então o limite de resistência pode ser calculado para as duas situações de posição da linha neutra plástica ilustradas na Figura 7.1. Por exemplo, para a linha neutra da alma, tem-se:

$$y_n < \frac{h}{2} \quad \text{Equação 7.4}$$
$$N = 2f_y t_w y_n$$

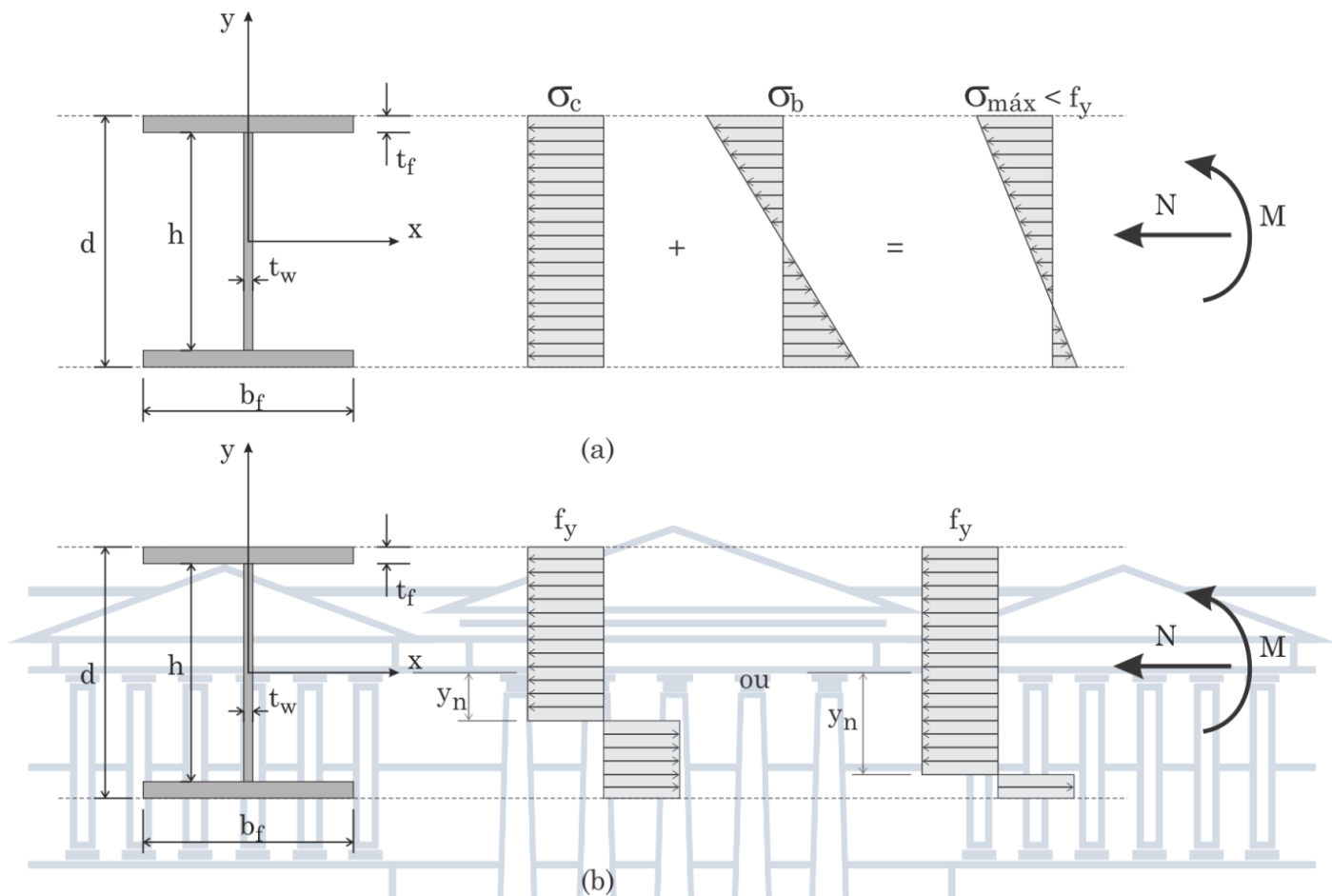


Figura 7.1: Resistência da seção limitada pelo início da plastificação (a) e resistência da seção associada à plastificação total (b).

$$M = b t_f f_y (h + t_f) + t_w f_y \left(\frac{h^2}{4} - y_n^2 \right) \quad \text{Equação 7.5}$$

Uma expressão aproximada de resistência da seção, para qualquer posição da linha neutra, pode ser usada no estado limite último, a qual mantém o formato básico da Equação 7.3, obtida por combinação de tensões no regime elástico:

$$\frac{N}{N_y} + \frac{M}{M_p} = 1 \quad \text{Equação 7.6}$$

Onde $M_p = Z f_y$.

Outra aproximação (NBR 8800) é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \text{se } \frac{N}{N_y} \geq 0,2 & \rightarrow \frac{N}{N_y} + \frac{8 M}{9 M_p} = 1 \\ \text{se } \frac{N}{N_y} < 0,2 & \rightarrow \frac{N}{2 N_y} + \frac{M}{M_p} = 1 \end{aligned} \quad \text{Equação 7.7}$$

Essas equações representam melhor o limite de resistência teórica sendo que a aproximação da Equação 7.6 é mais conservadora que a Equação 7.7.

A normas, para definir o limite de resistência de barras sob flexocompressão ou flexotração, adotam expressões chamadas de curvas de interação, que possuem o formato da Equação 7.7 e incorporam todas as possibilidades de instabilidade das barras, seja no modo coluna, no modo viga ou no modo local (de placa).

7.2 VIGA-COLUNA SUJEITA A FLAMBAGEM NO PLANO DE FLEXÃO

7.2.1 EXTREMOS INDESLOCÁVEIS

Esse é o caso em que uma viga-coluna com extremidades indeslocáveis apresenta uma deflexão lateral, δ_t , resultante da ação da compressão e do momento fletor.

Considera-se inicialmente o caso em que são aplicados nas extremidades momentos M iguais e opostos como ilustra a Figura 7.2.

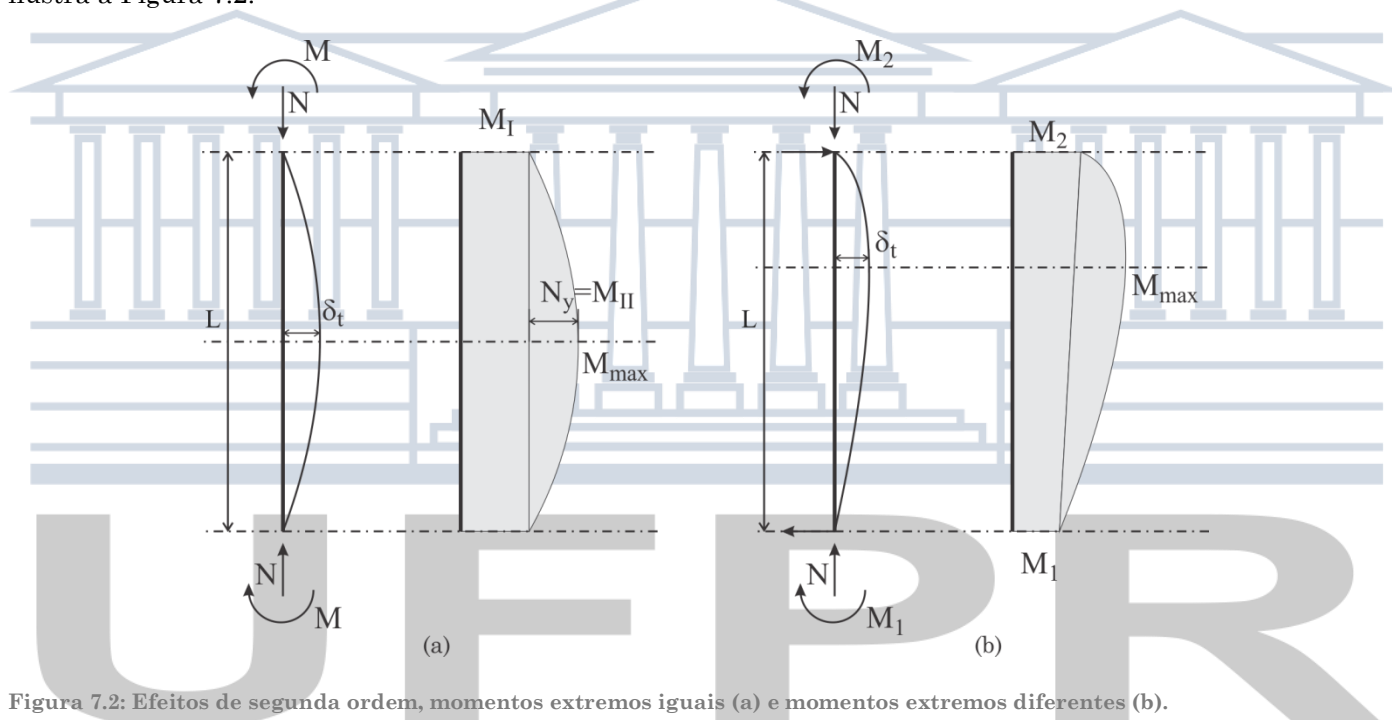


Figura 7.2: Efeitos de segunda ordem, momentos extremos iguais (a) e momentos extremos diferentes (b).

Sob a ação desses momentos apenas, a viga-coluna apresentaria uma deflexão primária no meio do vão igual a:

$$\delta_1 = \frac{ML^2}{8EI}$$

Equação 7.8

Mas com o esforço normal N há também um momento fletor secundário M_N , e o equilíbrio se dá com a deflexão total, dada por:

$$\delta_t = \frac{M}{N} \left[\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}} - 1 \right]$$

Equação 7.9

Na qual:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{Equação 7.10}$$

A Equação 7.9 quando considerada no meio do vão, pode ser aproximada por:

$$\delta_t \approx \frac{\delta_I}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad \text{Equação 7.11}$$

O momento fletor máximo, que ocorre no meio do vão, nesse caso, é a soma do momento fletor de 1ª ordem M_I com o momento fletor M_N originado da ação do esforço normal na estrutura deformada (efeito de segunda ordem), resultando em:

$$M_{\max} = M_I + M_N = M_I + N\delta_t = M_I \frac{C}{\left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)} \quad \text{Equação 7.12}$$

Onde:

$$C = 1 + 0,23 \frac{N}{N_{cr}} \quad \text{Equação 7.13}$$

Observa-se que o momento máximo pode ser escrito como uma amplificação do momento primário M_I . Nesse caso, o coeficiente de amplificação foi obtido admitindo-se uma variação senoidal do momento de segunda ordem ao longo da altura da coluna. Em outras situações, tais como vigas-coluna com momentos extremos diferentes e ainda vigas coluna com cargas transversais aplicadas, pode-se também chegar à determinação do momento máximo no mesmo formato.

$$M_{\max} = B_1 M_I \quad \text{Equação 7.14}$$

Onde:

$$B_1 = C_m \frac{1}{\left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)} \geq 1,0 \quad \text{Equação 7.15}$$

Sendo:

C_m um fator que depende da configuração do diagrama do momento fletor de primeira ordem e da relação N/N_{cr} .

M_I é o máximo momento fletor de primeira ordem.

De acordo com a NBR 8800, em barras que não forem solicitadas por cargas transversais tem-se:

$$C_m = 0,60 - 0,40 \frac{M_1}{M_2}$$

Equação 7.16

Sendo os momentos M_1 e M_2 os momentos de extremidade da barra com $|M_2| > |M_1|$.

Em caso de barras com extremidades indeslocáveis sujeitas a cargas transversais, C_m pode ser adotado de maneira conservadora como igual a 1,0.

A resistência de uma seção pode ser calculada para uma viga-coluna sujeita à flambagem no plano de flexão, substituindo-se o momento solicitante da Equação 7.6 pelo momento máximo dado pela Equação 7.14, resultando em:

$$\frac{N}{N_c} + \frac{B_1 M_1}{M_p} = 1$$

Equação 7.17

Onde N_c é a carga última de compressão da barra, a qual causaria o colapso na ausência do momento fletor M , e vale $f_c A_g$.

7.2.2 VIGA-COLUNA COM EXTREMIDADES DESLOCÁVEIS

O comportamento não-linear de vigas-coluna com extremidade deslocável lateralmente pode ser estudado decompondo-se em parcelas tanto a configuração deformada quanto o diagrama de momentos fletores, conforme ilustra a Figura 7.3.

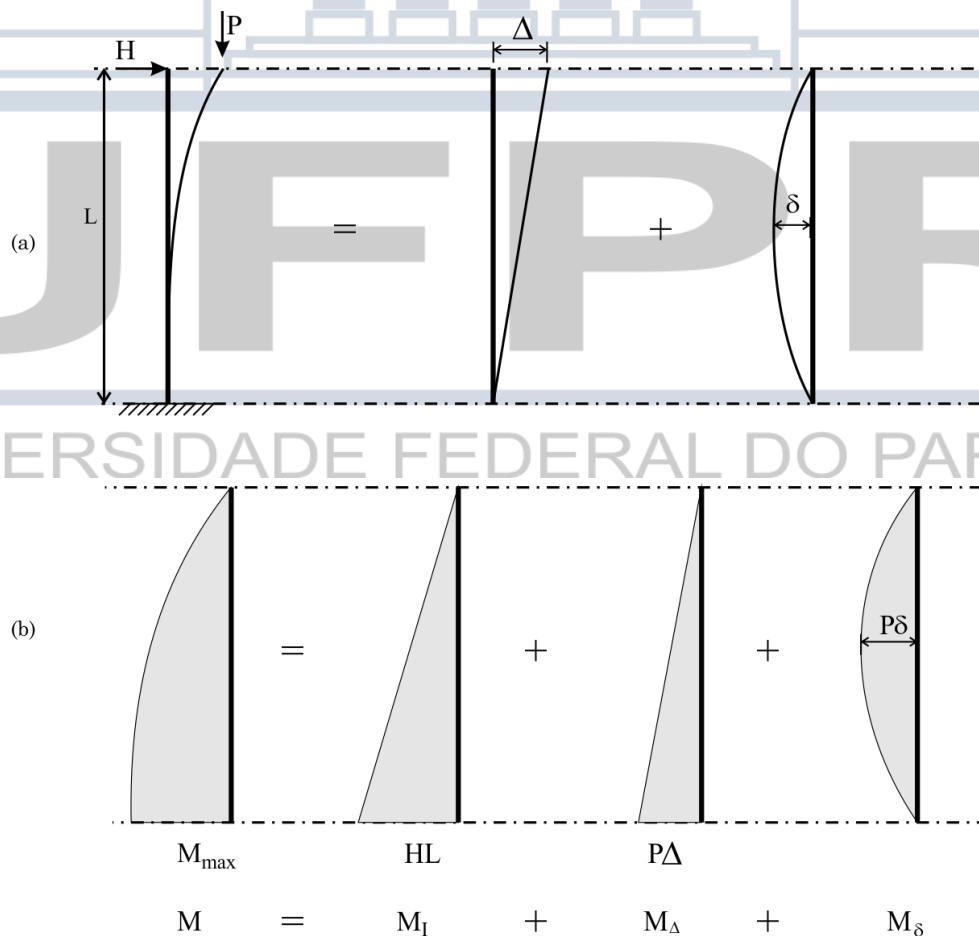


Figura 7.3: Decomposição da configuração deformada (a) e decomposição do diagrama de momentos fletores (b).

Os deslocamentos são desmembrados em uma configuração retilínea ligando os pontos extremos afastados lateralmente de Δ e uma configuração deformada da curva ao longo da barra representada pelo deslocamento δ . O diagrama de momentos pode ser decomposto em três parcelas:

M_I , o momento de primeira ordem, calculado com a barra indeformada;

M_Δ , o momento da força axial decorrente do deslocamento lateral do extremo da barra;

M_δ , o momento da força axial devido ao deslocamento do eixo da barra, δ , tal qual o momento de segunda ordem da viga-coluna com apoios extremos indeslocáveis.

As parcelas de M_Δ e M_δ são momentos de segunda ordem obtidos por equilíbrio da barra na configuração deformada e são conhecidos, respectivamente, por efeito global de segunda ordem (P- Δ) e efeito local de segunda ordem (P- δ). Tal como M_δ , o momento M_Δ também pode ser escrito na forma de uma amplificação do momento primário M_I . Para isso, considera-se a viga-coluna engastada e livre da Figura 7.4. Na Figura 7.4a ilustram-se os resultados da análise linear (primeira ordem) em termos o deslocamento no topo Δ_I e o momento fletor na base M_I . A análise feita com o equilíbrio na posição deformada (segunda ordem) apresenta os resultados mostrados na Figura 7.4b, sendo o momento na base M_Δ escrito como uma amplificação de M_I .

$$M_\Delta = B_2 M_I = HL + N\Delta$$

Equação 7.18

O cálculo do deslocamento Δ é feito com base na análise da mesma viga-coluna sob ação de uma carga equivalente H_{eq} ilustrada na Figura 7.4c, que fornece o mesmo momento M_Δ na base. Igualando-se, de forma aproximada, os deslocamentos no topo dos sistemas das Figura 7.4b e Figura 7.4c, tem-se:

$$\Delta = \Delta_I \left(1 + \frac{N\Delta}{HL} \right) = \left(H + \frac{N\Delta}{L} \right) \frac{L^3}{3EI}$$

Equação 7.19

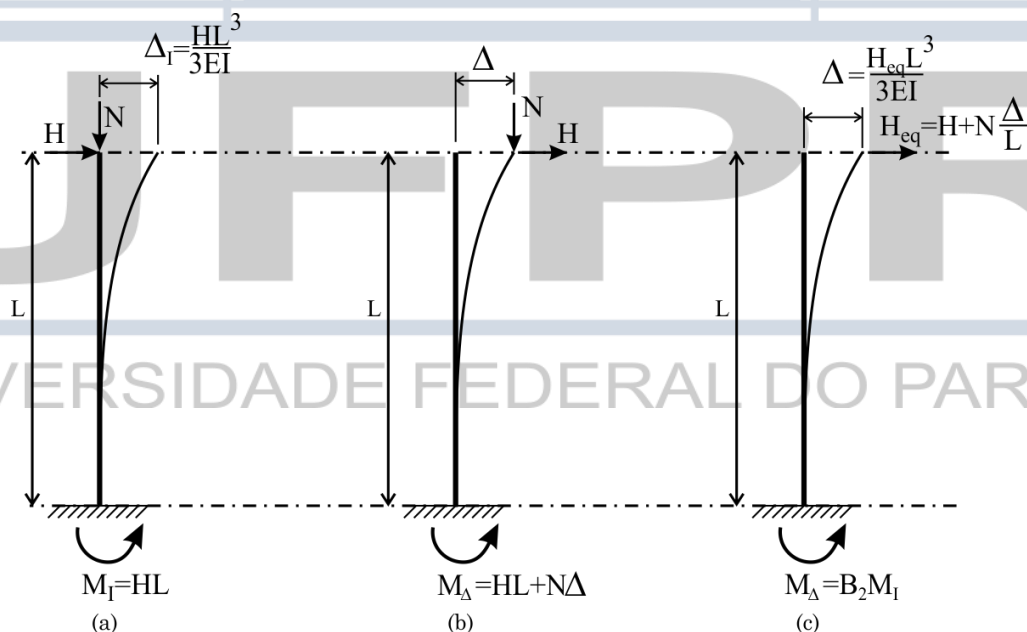


Figura 7.4: Análise Linear (a), Análise de segunda ordem (b) e análise linear com carga lateral equivalente.

Resolvendo-se a Equação 7.19 para Δ e substituindo-se na Equação 7.18, obtém-se a expressão de B_2 :

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{N\Delta_I}{HL}}$$

Equação 7.20

No caso de a vigas-coluna pertencer a um pórtico, o esforço normal N e a carga horizontal H na Equação 7.20 são substituídos, respectivamente por $\sum N$ e $\sum H$, que representam o somatório dos esforços normais e esforços cortantes nas colunas do andar. Chega-se assim, ao coeficiente B_2 apresentado pela NBR 8800/2008 para compor o método da amplificação dos esforços.

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{\Delta_h}{h} \frac{\sum N_d}{\sum H_d}}$$

Equação 7.21

Onde $\sum N_d$ e $\sum H_d$ são, respectivamente, a carga gravitacional (vertical) e o esforço cortante totais de projeto no andar considerado. Ainda,

Δ_h é o deslocamento interpavimento resultante da análise linear (primeira ordem);

h é a altura do pavimento;

$R_s = 0,85$ nas estruturas com funcionamento de pórtico, nas quais a rigidez lateral depende da rigidez à flexão das barras e da rigidez à rotação das ligações. Para estruturas contraventadas $R_s = 1,0$.

7.2.3 MÉTODO DA APLIFICAÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

Os esforços solicitantes de projeto resultantes de uma análise de segunda ordem podem ser obtidos de forma aproximada aplicando-se os coeficientes B_1 e B_2 aos resultados de duas análises lineares a serem superpostas: análise da estrutura impedida de deslocar-se lateralmente (estrutura *nt*) e análise da estrutura deslocável (estrutura *lt*) sujeita apenas às cargas horizontais iguais às reações obtidas na estrutura *nt*. A superposição dos esforços amplificados é feita com as expressões:

$$M_d = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt}$$

$$N_d = N_{nt} + B_2 M_{lt}$$

Equação 7.22

7.3 DIMENSIONAMENTO DE BARRAS À FLEXOCOMPRESSÃO E À FLEXOTRAÇÃO

Nos métodos elásticos de análise de tensões utilizados no método das tensões admissíveis, o dimensionamento a flexocompressão era feito por adição das tensões normais, Equação 7.1. Nos estados limites, como os mecanismos de ruptura são diferentes para cada solicitação, a adição de tensão é substituída por equações empíricas de interação. O formato dessas equações foi apresentado na Equação 7.7 para o caso da plastificação total da seção transversal.

No caso da aplicação dessas equações no estado limite do projeto, os esforços solicitantes M e N são substituídos pelos correspondentes esforços de projeto, M_d e N_d , e os esforços de plastificação são substituídos pelos esforços resistentes à compressão (ou tração) e à flexão de projeto, considerando os estados limites aplicáveis tais como plastificação da seção, flambagem global de colunas, flambagem local, flambagem lateral de vigas, etc.

As equações de interação adotadas pela NBR 8800 se aplicam a seções I e H com dois eixos de simetria, nas seções I ou H com um eixo de simetria no plano médio da alma e com flexão nesse plano, e para outras seções:

$$\text{se } \frac{N_d}{N_{d,res}} \geq 0,2 \quad \rightarrow \quad \frac{N_d}{N_{d,res}} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{dx}}{M_{d,res,x}} + \frac{M_{dy}}{M_{d,res,y}} \right) \leq 1$$

Equação 7.23

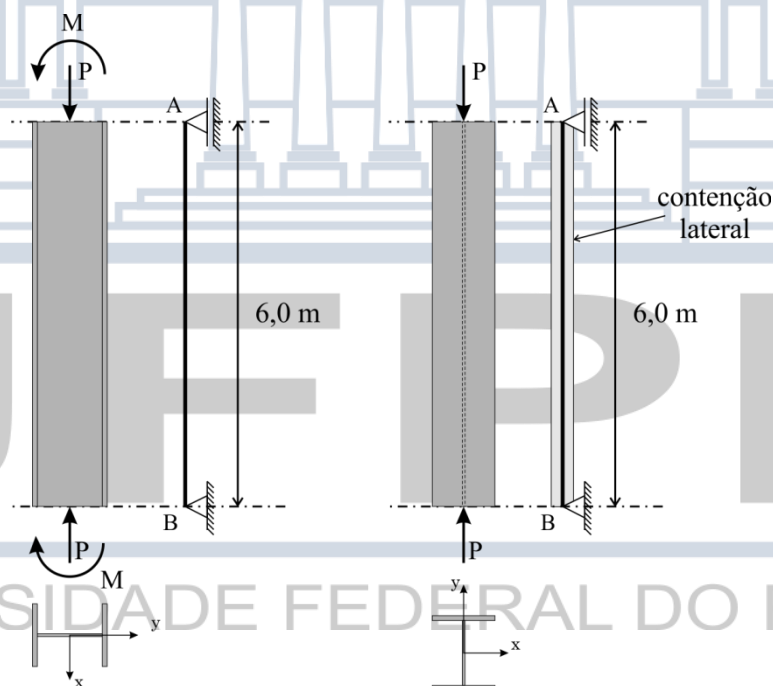
$$\text{se } \frac{N_d}{N_{d,res}} < 0,2 \quad \rightarrow \quad \frac{N_d}{2N_{d,res}} + \frac{M_{dx}}{M_{d,res,x}} + \frac{M_{dy}}{M_{d,res,y}} \leq 1$$

Onde N_d , M_{dx} e M_{dy} são os esforços solicitantes de projeto, sendo os dois últimos os momentos fletores em torno dos eixos x e y , respectivamente, e N_d o esforço axial de tração ou de compressão. $N_{d,res}$ é o esforço axial resistente de projeto (tração ou compressão, o que for aplicável) e $M_{d,res,x}$ e $M_{d,res,y}$ são os momentos fletores resistentes em relação aos eixos x e y respectivamente.

7.4 EXEMPLOS

EXEMPLO 7.1

Uma coluna com extremidades indesejáveis de perfil CVS 450x116, de aço MR250, está sujeita a esforços permanentes de compressão $P=800\text{kN}$ e momento fletor constante $M=50\text{ kN.m}$ atuando no plano da alma. Verifique a segurança da coluna, sabendo-se que há contenção lateral contínua no plano perpendicular à alma e que o comprimento de flambagem da coluna no plano do momento fletor é de 6 m.



a) Esforços solicitantes de projeto

Esforço normal solicitante de projeto

$$N_d = 1,4 \cdot 800 = 1120 \text{ kN}$$

Momento fletor solicitante de projeto

O diagrama de momentos fletores será como o ilustrado na Figura 7.2a, com a seção no meio do vão sendo a mais solicitada em função da flambagem (efeito $P-\delta$). O momento máximo pode ser calculado com a Equação 7.14, sendo C_m dado pela Equação 7.16:

$$C_m = 1,0$$

$$\left(\frac{Kl}{i}\right)_x = \frac{600}{18,88} = 31,8$$

$$N_{cr,x} = \frac{\pi^2 20000}{31,8^2} 148,3 = 28948 \text{ kN}$$

$$B_1 = \frac{1,0}{1 - \frac{1120}{28948}} = 1,039 \geq 1,0$$

$$M_{dx} = 1,450 \cdot 1,039 = 72,7 \text{ kNm}$$

b) Esforços solicitantes à compressão e à flexão

Características geométricas do perfil

$$A = 148,3 \text{ cm}^2$$

$$W_x = 2348 \text{ cm}^3$$

$$i_x = 18,88 \text{ cm}$$

$$I_y = 7207 \text{ cm}^4$$

$$W_y = 480 \text{ cm}^3$$

$$i_y = 6,67 \text{ cm}$$

$$J = 109 \text{ cm}^4$$

$$C_w = 3393704 \text{ cm}^6$$

$$Z_x = 2629 \text{ cm}^3$$

Classificação da seção quanto à flambagem local

Mesa:

$$\frac{b_f}{2t_f} = \frac{300}{2 \cdot 16} = 9,4 < 11$$

Alma:

$$\frac{h}{t_w} = \frac{418}{125} = 33 < 42 \quad \therefore Q = 1,0$$

Verifica-se que a seção é compacta para compressão axial, Tabela 4.1, e para flexão, Tabela 5.1.

Esforço normal resistente na barra (flambagem em torno do eixo xx):

$$\lambda_0 = 31,8 \sqrt{\frac{250}{\pi^2 200000}} = 0,36$$

$$N_{d,res} = 148,3 \cdot 0,947 \frac{25}{1,10} = 3192 \text{ kN}$$

Momento fletor resistente

$$M_{d,res} = 2629 \frac{25}{1,10} = 59750 \text{ kNcm} = 591,7 \text{ kNm}$$

c) Verificação da seção do meio do vão (barra sob flexocompressão com flambagem)

Equação de interação

$$\frac{1120}{3192} + \frac{72,7}{591,7} = 0,35 + 0,12 = 0,47$$

A coluna atende ao critério de segurança.