

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À TRELIÇAS PLANAS

Visando exemplificar os conceitos introduzidos anteriormente, trabalharemos com treliças planas. Apesar do fato das treliças planas gerarem problemas extremamente simples, os conceitos aqui introduzidos podem ser facilmente generalizados para a solução de outros problemas mais complexos.

1. REVISÃO DE CONCEITOS DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

1.1. PEÇAS ESBELTAS SUJEITAS A CARREGAMENTO AXIAL. CASO I - BARRA CILÍNDRICA - ENSAIO DE TRAÇÃO PURA:

Analisaremos o caso mais simples de uma barra de comprimento L , com seção transversal cilíndrica com diâmetro d , submetida a uma tração axial. Esta situação ocorre por exemplo em um ensaio de tração pura, conforme mostra a figura 1-a. O material será suposto isotrópico, elástico linear, com Módulo de Young E e Coeficiente de Poisson ν . Inicialmente despreza-se os efeitos do peso próprio. Supõe-se que ocorre um carregamento de tração na barra (carga P) que causa deformações, sendo que os pontos da barra sofrem deslocamentos.

- SISTEMA DE COORDENADAS DE REFERÊNCIA: escolhemos um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas $Oxyz$ cujo eixo x coincide com o eixo da peça.
- MODELO MATEMÁTICO a ser solucionado está esquematizado na figura 1-b: uma barra cilíndrica engastada em $x=0$ e com carga P crescente de tração aplicada na extremidade livre em $x=L$.

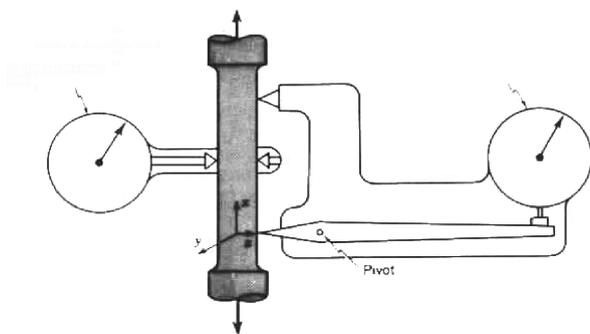


Figura 1-a - Esquema de um ensaio de tração.

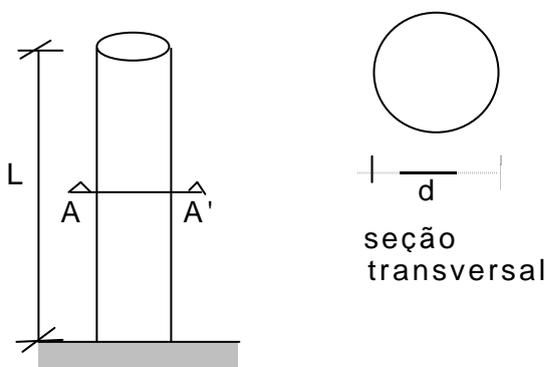


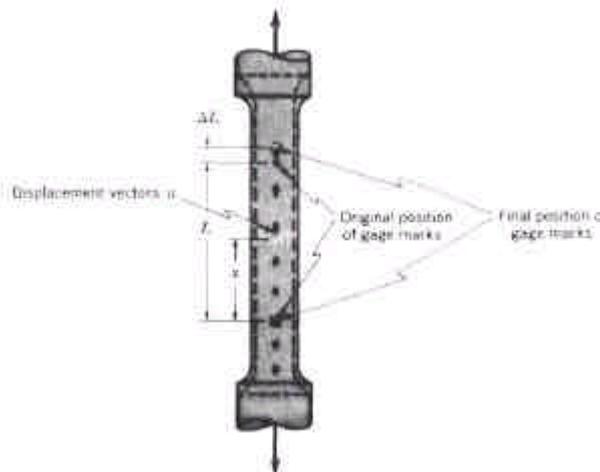
Figura 1-b - Modelo matemático.

- CINEMÁTICA:

Hipóteses simplificadoras:

- ⇒ Fibras longitudinais ou se alongam ou se encurtam;
- ⇒ Seções planas e normais ao eixo axial da peça permanecem planas e normais a tal eixo após a deformação;
- ⇒ Seções paralelas permanecem paralelas após a deformação.

Campo de deslocamentos:



Para este modelo cinemático, ou seja, quando se adotam as hipóteses cinemáticas simplificadoras listadas acima, o único campo de deslocamentos possível é o que admite que a seção transversal, distante x da origem, após a transformação tomará a posição $x + u_x(x)$.

Figura 2- Deslocamentos em um ensaio de tração

Alongamento:

Da Resistência dos Materiais sabe-se que a deformação, ou seja, o alongamento segundo a direção x é dado por

$$\mathbf{e}_x(x) = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.)$$

e como mostraremos mais tarde, tal relação é

$$\mathbf{e}_x(x) = \frac{du_x(x)}{dx} \quad (2.)$$

- EQUAÇÃO CONSTITUTIVA:

para um material isotrópico elástico linear:

$$\mathbf{s}_x(x) = E\mathbf{e}_x(x) \quad (3.)$$

O esforço normal interno $N_x(x)$ é definido a partir de

$$N_x(x) = \int_A \mathbf{s}_x(x) dA \quad (4.)$$

e para regiões *suficientemente* afastadas da zona de aplicação da carga concentrada, onde a tensão $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_x(x)$ pode ser considerada constante, pode-se escrever:

$$N_x = \mathbf{s}_x \int_A dA = \mathbf{s}_x A_x \quad (5.)$$

onde a área é $A = A_x = \mathbf{p}d^2/4$ é constante ao longo de x . Como despreza-se o peso próprio e o único carregamento externo é a carga de tração aplicada no extremo $x = L$, o esforço normal $N_x = N_x(x)$ é constante ao longo da barra e portanto a equação diferencial de equilíbrio fica

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \quad (6.)$$

e usando-se as expressões que definem a força normal, a tensão e a deformação em função do deslocamento, a relação anterior toma a forma

$$\frac{d}{dx} \left[A_x E \frac{du_x(x)}{dx} \right] = 0 \quad (7.)$$

e como neste caso a área é constante

$$AE \frac{d^2 u_x(x)}{dx^2} = 0 \quad (8.)$$

- CONTORNO:

para $x = 0$ impõe-se

$$u_x(0) = 0$$

para $x = L$ impõe-se

$$N_x(L) = P$$

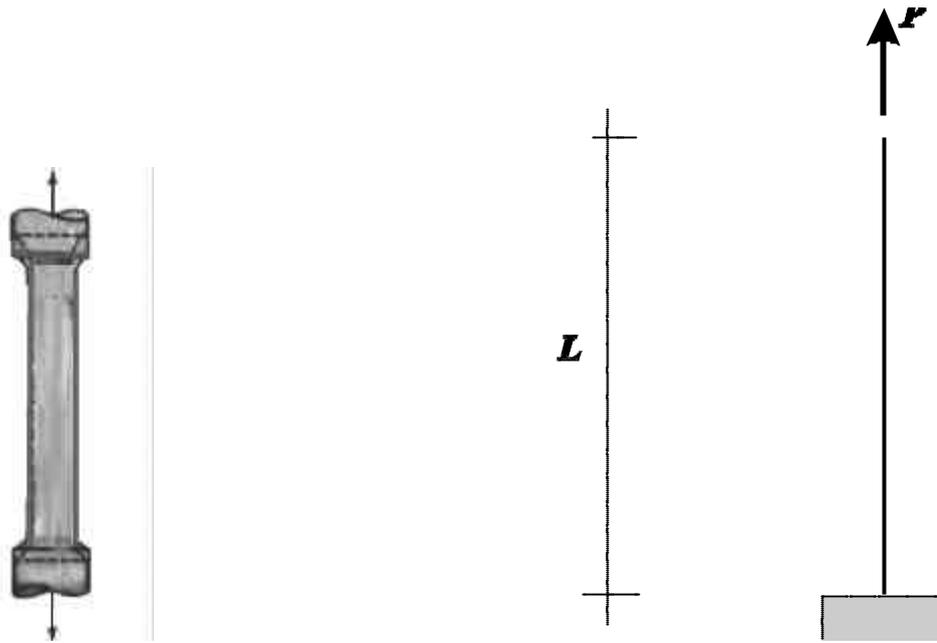


Figura 3 - Forças axiais na barra e condições de contorno.

Resolvendo-se a equação diferencial acima com as condições de contorno, chega-se a solução

$$u_x(x) = \frac{Px}{AE} \quad (9.)$$

Caso exista uma carga distribuída longitudinal q_x a equação diferencial de equilíbrio (ver POPOV - páginas 117 a 122) fica:

$$\frac{d}{dx} \left[A_x E \frac{du_x(x)}{dx} \right] = -q_x(x) \quad (10.)$$

1.2. PEÇAS ESBELTAS SUJEITAS A CARREGAMENTO AXIAL. CASO GERAL.

Estudemos o caso de uma barra B de comprimento L, seção transversal variável com área A_x , composta de material isotrópico, elástico linear, com Módulo de Young E e Coeficiente de Poisson ν , submetida ao sistema de cargas $f\{P_j, q_x(x)\}$ (onde P_j são cargas concentradas na direção longitudinal da peça, aplicadas nos pontos de coordenadas x_j e $q_x(x)$, uma carga distribuída não necessariamente constante na direção longitudinal aplicada em toda a barra) e a prescrição de deslocamentos homogêneas do tipo bilateral $u_x(x_j) = 0$ nos pontos de coordenadas x_j . Supõe-se que ocorra uma transformação, ou seja, os pontos do contínuo sofram deslocamentos.

- SISTEMA DE COORDENADAS DE REFERÊNCIA: escolhemos um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas $Oxyz$ cujo eixo x coincide com o eixo da peça.
- CINEMÁTICA:
Hipóteses simplificadoras:
 - ⇒ Fibras longitudinais ou se alongam ou se encurtam;
 - ⇒ Seções planas e normais ao eixo axial da peça permanecem planas e normais a tal eixo após a deformação;
 - ⇒ Seções paralelas permanecem paralelas após a deformação.

Campo de deslocamentos

Para este modelo cinemático, ou seja, quando se adotam as hipóteses cinemáticas simplificadoras listadas acima, o único campo de deslocamentos possível é o que admite que a seção transversal, distante x da origem, após a transformação tomará a posição $x + u_x(x)$. Falta identificar quais os tipos de restrições que, por hipótese, poderão ser impostas ao campo

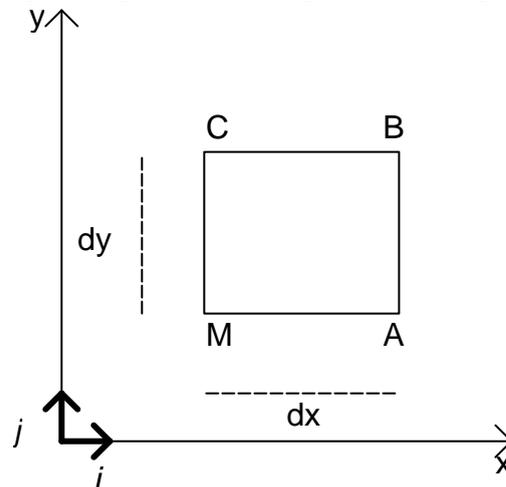


Figura 4 - Paralelogramo infinitesimal.

de deslocamentos. Por simplicidade, adotamos apenas restrições bilaterais e homogêneas. Por restrições bilaterais entende-se aquelas que, se o deslocamento está impedido em uma direção, também estará impedido na direção oposta. Por restrições homogêneas entende-se aquelas que impõe deslocamentos nulos nos pontos de impedimentos x_j .

Componentes infinitesimais de deformação:

A Teoria Infinitesimal, segundo GREEN, é aquela na qual assume-se que as componentes do vetor de deslocamento (neste caso, a componente $u_x(x)$) e suas derivadas em relação aos eixos coordenados (neste caso, a derivada do deslocamento $u_x(x)$ em relação a x , $du_x(x)/dx$) e em relação ao tempo t são pequenas, de forma que pode-se negligenciar os termos não lineares se comparados com os termos lineares. Toma-se um paralelogramo infinitesimal de arestas paralelas aos eixos coordenados x e y , com comprimentos dx e dy , conforme mostra a figura 4. Com a deformação do contínuo, ocorre uma variação no comprimento de suas arestas. Como os

deslocamentos variam ponto a ponto no contínuo e supondo-se conhecido o deslocamento do ponto M, de coordenadas (x,y) , igual a

$$\mathbf{d}_M = u_x(x)\mathbf{i} \quad (11.)$$

pode-se, por utilização da fórmula de Taylor, obter os valores dos deslocamentos em pontos próximos a M. Assim, no ponto B de coordenadas $(x+dx,y)$, a componente do vetor do deslocamento fica

$$u_x(x) + \frac{du_x(x)}{dx} dx + \frac{d^2 u_x(x)}{dx^2} dx^2 + \dots \quad (12.)$$

Negligenciando-se os termos de ordem superior perante os lineares, a componente do vetor deslocamento neste ponto toma a forma

$$u_x(x) + \frac{du_x(x)}{dx} dx \quad (13.)$$

Esta relação é linear e portanto retas paralelas são transformadas em retas paralelas. Assim o paralelogramo infinitesimal no estado final continuará sendo um paralelogramo, apenas que agora alongado na direção x , conforme mostra a figura 5.

Como o vetor deslocamento do ponto M é

$$\mathbf{d}_M = u_x(x)\mathbf{i} \quad (14.)$$

e o vetor deslocamento do ponto A

$$\mathbf{d}_A = \left[u_x(x) + \frac{du_x(x)}{dx} dx \right] \mathbf{i} \quad (15.)$$

sendo \mathbf{i} o vetor unitário na direção x , então $\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_M$ é dado por

$$\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_M = \left[\frac{du_x(x)}{dx} dx \right] \mathbf{i} \quad (16.)$$

Da análise da figura 5, verifica-se que o comprimento do segmento $\mathbf{M}'\mathbf{A}'$ vale

$$|\mathbf{M}'\mathbf{A}'| = \left| dx\mathbf{i} + (\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_M) \right| = dx + \frac{du_x(x)}{dx} dx \quad (17.)$$

enquanto o comprimento do segmento \mathbf{MA} vale

$$|\mathbf{MA}| = dx \quad (18.)$$

Da Resistência dos Materiais sabe-se que a deformação, ou seja, o alongamento segundo a direção x é dado por

$$\mathbf{e}_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{|\mathbf{M'A'} - \mathbf{MA}|}{|\mathbf{MA}|} = \frac{\left[dx + \frac{du_x(x)}{dx} dx \right] - dx}{dx} \quad (19.)$$

ou seja,

$$\mathbf{e}_x = \frac{du_x(x)}{dx}$$

como adotado no item anterior.

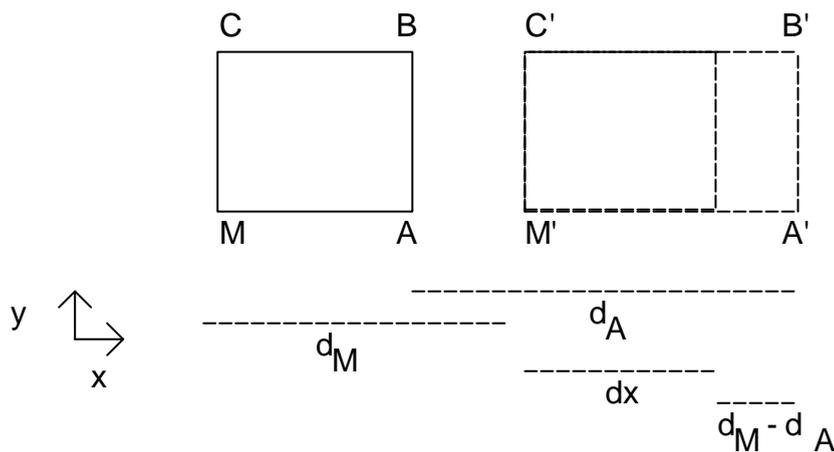


Figura 5 - Paralelogramo infinitesimal antes e após a transformação.

- ESFORÇOS INTERNOS:

A existência de esforços interiores fica evidente quando observa-se que ao submeter-se um corpo deformável a ações de forças externas, suas partículas permanecem unidas. Portanto alguma força interna deve ser responsável por este fenômeno. A título de ilustração, analisemos como se age quando se quer saber se alguma correia está adequadamente tensionada. Para tal, tratamos de deslocá-la da posição inicial, e portanto impomos um alongamento da correia (ou seja, uma deformação virtual) que nos permitirá ter uma idéia da tensão na correia através do trabalho realizado para executar este movimento. Portanto para o problema da barra submetida a tração axial, vamos introduzir o conceito de trabalho realizado pelos esforços internos W_i , em

conseqüência de um campo de deformações virtuais gerado a partir de um campo de deslocamentos virtuais, pela seguinte definição:

$$\begin{aligned} W_i &= -\int_B \mathbf{s}_x(x) d\mathbf{e}_x(x) dB = -\int_0^L \left(\int_A \mathbf{s}_x(x) dA \right) d\mathbf{e}_x(x) dx = \\ &= -\int_0^L N_x(x) d\mathbf{e}_x(x) dx \end{aligned} \quad (20.)$$

para *toda (qualquer)* deformação virtual $d\mathbf{e}_x(x)$. Desta definição reconhece-se em $N_x(x)$ o esforço interno generalizado associado ao alongamento da barra, sendo este

$$N_x(x) = \int_A \mathbf{s}_x(x) dA \quad (21.)$$

- EQUAÇÃO CONSTITUTIVA:

como já definimos anteriormente, para um material isotrópico elástico linear:

$$\mathbf{s}_x(x) = E \mathbf{e}_x(x)$$

- FORÇAS EXTERNAS:

Imaginemos que uma determinada caixa encontra-se no piso desta sala. Para termos uma idéia do seu peso, tentamos levantá-la. Portanto tal avaliação é feita através do trabalho realizado para levantar a caixa. Ou seja, introduzindo-se um deslocamento virtual em contraposição a posição natural de repouso, pode-se avaliar o trabalho realizado e conseqüentemente a força necessária para levantar a caixa e finalmente seu peso. Para formalizar a idéia anterior, no problema em questão, introduzimos o conceito de trabalho externo W_e realizado pelas forças externas $f\{P_j, q_x(x)\}$ em conseqüência de um campo de deslocamentos virtuais $d\mathbf{u}_x(x)$, pela seguinte definição:

$$W_e = \int_0^L q_x(x) d\mathbf{u}_x(x) dx + \sum_j P_j d\mathbf{u}_x(x_j) \quad (22.)$$

para *toda (qualquer)* deslocamento virtual $d\mathbf{u}_x(x)$.

- EQUILÍBRIO:

Para definição de equilíbrio adota-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, ou seja

Diz-se que uma barra B encontra-se em equilíbrio com o sistema de forças f, se para todo deslocamento virtual $d\mathbf{u}_x(x)$, que satisfaça as condições de contorno, a distribuição de esforços internos generalizados $N_x(x)$ associada ao sistema de cargas é tal que

$$W_i + W_e = 0 \text{ para todo } \mathbf{du}_x \quad (23.)$$

ou seja, o trabalho virtual dos esforços internos generalizados e das cargas aplicadas é nulo para toda ação virtual de deslocamento admissível. A expressão (23) pode ser escrita explicitamente da forma:

$$-\int_0^L N_x(x) \mathbf{de}_x(x) dx + \int_0^L q_x(x) \mathbf{du}_x(x) dx + \sum_j P_j \mathbf{du}_x(x_j) = 0 \text{ para todo } \mathbf{du}_x(x) \quad (24.)$$

onde $N_x(x) = N_x(\mathbf{e}_x(x))$ é o esforço interno generalizado associado a deformação $\mathbf{e}_x(x)$ pela equação constitutiva.

Resta-nos provar que a expressão (24) representa a forma integral ou "fraca" da equação diferencial (10), incluindo as condições de contorno. Para isto, parte-se da expressão (24) e usa-se (3), (2) e (4) para se chegar a

$$-\int_0^L EA_x \frac{du_x(x)}{dx} \frac{d\mathbf{du}_x(x)}{dx} dx + \int_0^L q_x(x) \mathbf{du}_x(x) dx + \sum_j P_j \mathbf{du}_x(x_j) = 0 \text{ para todo } \mathbf{e} \quad (25.)$$

Levando-se em consideração a seguinte relação

$$\frac{d}{dx} \left(v + \frac{du}{dx} \right) = \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} + v \frac{d^2u}{dx^2} \quad (26.)$$

ou ainda

$$\frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(v + \frac{du}{dx} \right) - v \frac{d^2u}{dx^2} \quad (27.)$$

e integrando-se

$$\int_0^L \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^L \frac{d}{dx} \left(v + \frac{du}{dx} \right) dx - \int_0^L v \frac{d^2u}{dx^2} dx = \left[v + \frac{du}{dx} \right]_0^L - \int_0^L v \frac{d^2u}{dx^2} dx \quad (28.)$$

ou seja, utilizando-se a regra de *integração por partes*. Substituindo-se em (25) fica

$$\int_0^L EA_x \frac{d^2u_x}{dx^2} \mathbf{du}_x dx + \int_0^L q_x \mathbf{du}_x dx + \sum_j P_j \mathbf{du}_x(x_j) + EA_x \mathbf{du}_x(L) \frac{du_x(L)}{dx} - EA_x \mathbf{du}_x(0) \frac{du_x(0)}{dx} = 0 \text{ para todo } \mathbf{du}_x \quad (29.)$$

e reagrupando-se

$$\int_0^L \left[EA_x \frac{d^2 u_x(x)}{dx^2} + q_x \right] du_x(x) dx + \sum_j P_j du_x(x_j) + EA_x du_x(L) \frac{du_x(L)}{dx} - EA_x du_x(0) \frac{du_x(0)}{dx} = 0 \text{ para todo } du_x \quad (30.)$$

Como a igualdade anterior deve ser nula para qualquer deslocamento virtual du_x então a igualdade variacional acima é equivalente às seguintes expressões:

$$EA_x \frac{d^2 u_x(x)}{dx^2} = -q_x \quad (31.)$$

$$\begin{array}{ll} \text{para } x=0 & \text{para } x=L \\ u(0) = 0 \text{ ou } N_0 = P_0 & u(L) = 0 \text{ ou } N_L = P_L \end{array} \quad (32.)$$

2. MÉTODOS DE SOLUÇÃO:

2.1. FORMULAÇÃO DIRETA DO ELEMENTO DE TRELIÇA:

Usaremos neste item apenas os conceitos de equilíbrio para obter as equações referentes a este elemento.

Cada barra de uma treliça poderá ser identificada naturalmente como um elemento finito. Um nó é localizado em cada extremidade da barra (i e j). Identifica-se que cada nó da barra poderá apenas se deslocar na direção axial (eixo x local). Isto significa que cada nó possui

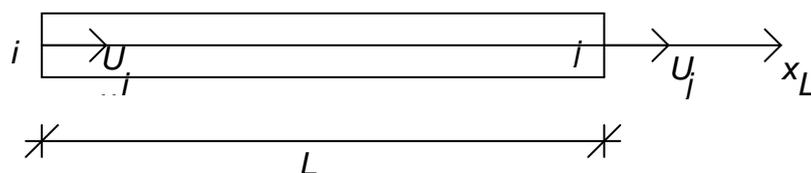


Figura 6 - Graus de liberdade do elemento de barra de treliça.

um grau de liberdade ou DOF-degrees of freedom - U_i e U_j conforme mostra a figura 6. Já a figura 7 mostra as forças nodais associadas a estes graus de liberdade, P_i e P_j respectivamente.

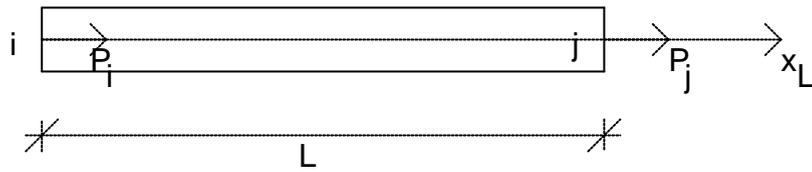


Figura 7 - Forças nodais do elemento de barra de treliça.

A equação de equilíbrio das forças na direção x nos fornece

$$P_j = -P_i \quad (33.)$$

e usando-se a relação (5) e a figura 8, pode-se obter as relações de equilíbrio nodal abaixo

$$P_i = N_i = -\mathbf{s}_x A_x \quad (34.)$$

$$P_j = N_j = \mathbf{s}_x A_x \quad (35.)$$

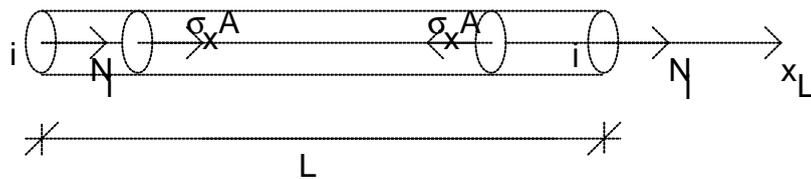


Figura 8 - Equilíbrio nodal.

Usando-se a relação (3), tem-se

$$P_i = -\mathbf{e}_x EA_x \quad (36.)$$

$$P_j = \mathbf{e}_x EA_x \quad (37.)$$

Da Resistência dos Materiais sabe-se que a deformação, ou seja, o alongamento segundo a direção x é dado por

$$\mathbf{e}_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{U_j - U_i}{L} \quad (38.)$$

e portanto,

$$P_i = -EA_x \frac{U_j - U_i}{L} \quad (39.)$$

$$P_j = EA_x \frac{U_j - U_i}{L} \quad (40.)$$

ou ainda, rescrevendo-a na forma matricial

$$\frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} \quad (41.)$$

que é a forma matricial da relação forças com deslocamentos.

2.2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE TRELIÇA VIA PRINCÍPIOS VARIACIONAIS:

Relembremos o Princípio dos Trabalhos Virtuais:

Diz-se que uma barra B encontra-se em equilíbrio com o sistema de forças f, se para todo deslocamento virtual \mathbf{du}_x , que satisfaça as condições de contorno, a distribuição de esforços internos generalizados N_x associada ao sistema de cargas é tal que

$$-\int_0^L N_x \mathbf{de}_x dx + \int_0^L q_x \mathbf{du}_x dx + \sum_j P_j \mathbf{du}_x(x_j) = 0 \text{ para todo } \mathbf{du}_x$$

onde $N_x = N_x(\mathbf{e}_x)$ é o esforço interno generalizado associado a deformação \mathbf{e}_x pela equação constitutiva. Ou ainda

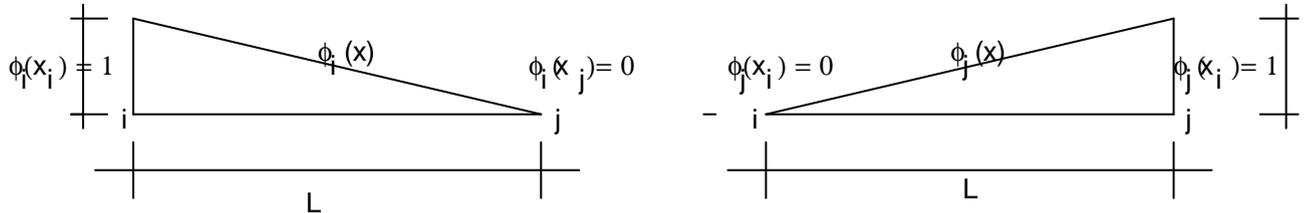


Figura 9 - Funções de interpolação.

$$-\int_0^L EA_x \frac{du_x(x)}{dx} \frac{d\mathbf{du}_x(x)}{dx} dx + \int_0^L q_x(x) \mathbf{du}_x(x) dx + \sum_j P_j \mathbf{du}_x(x_j) = 0 \text{ para todo } \mathbf{du}_x$$

Propondo-se a seguinte interpolação:

$$u_x(x) = U_i \mathbf{f}_i(x) + U_j \mathbf{f}_j(x) \quad (42.)$$

$$\mathbf{du}_x(x) = \mathbf{d}U_i \mathbf{f}_i(x) + \mathbf{d}U_j \mathbf{f}_j(x) \quad (43.)$$

onde \mathbf{f}_i e \mathbf{f}_j são as funções de interpolação representadas na figura 9. e U_i, U_j os valores dos deslocamentos nos nós i e j, ou seja:

$$f_i(x) = ax + b \quad (44.)$$

$$f_i(0) = 1$$

$$f_i(L) = 0 \quad (45.)$$

ou ainda, resolvendo a equação acima

$$f_i(x) = \frac{(L-x)}{L} \quad (46.)$$

e

$$f_j(x) = ax + b$$

$$f_j(0) = 0$$

$$f_j(L) = 1 \quad (47.)$$

ou ainda

$$f_j(x) = \frac{x}{L} \quad (48.)$$

Substituindo-se (48) e (46) em (44) tem-se para a interpolação a seguinte função:

$$u_x(x) = \left[\frac{(L-x)}{L} \right] U_i + \left[\frac{x}{L} \right] U_j \quad (49.)$$

que será utilizada tanto para $u_x(x)$ como para $du_x(x)$. Precisamos ainda calcular o valor da sua derivada:

$$\frac{du_x(x)}{dx} = \left[\frac{U_j - U_i}{L} \right] \quad (50.)$$

$$\frac{du_x(x)}{dx} = \left[\frac{U_j - U_i}{L} \right] \quad (51.)$$

Substituindo-se (50) na primeira parte de (43) tem-se:

$$\int_0^L EA_x \frac{du_x(x)}{dx} \frac{d^2u_x(x)}{dx^2} dx = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (52.)$$

Para o caso de cargas aplicadas nos nós i e j

$$\sum_i P_i du_x(x_i) = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} \quad (53.)$$

e assim na ausência de cargas de corpo q_x repete-se a expressão (41).

3 - TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS:

Nas seções anteriores utilizamos o elemento de barra sob esforço axial referenciado a um sistema de coordenadas local coincidente com o eixo da peça. Para que possamos trabalhar com treliças, torna-se obrigatório obter as matrizes referenciadas a um sistema de coordenadas global, não coincidente com o eixo local. Portanto, considere agora o elemento de barra como na figura 10.

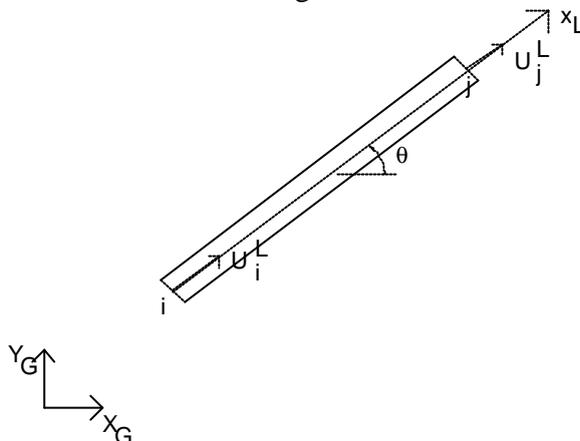


Figura 10 - Elemento de barra inclinado.

A relação entre o deslocamento U^L , na direção x^L , e suas componentes U^G e V^G , nas direções X^G e Y^G , respectivamente, é

$$U^L = U^G \cos \mathbf{q} + V^G \sin \mathbf{q} \quad (54.)$$

onde \mathbf{q} é o ângulo medido no sentido anti-horário, entre X^G e x^L , e portanto fica

$$\begin{Bmatrix} U^{Li} \\ U^{Lj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{Gi} \\ V^{Gi} \\ U^{Gj} \\ V^{Gj} \end{Bmatrix} \quad (55.)$$

Uma força axial P pode ser decomposta em componentes nas direções X^G e Y^G como:

$$P_x = P \cos \mathbf{q} \quad (56.)$$

$$P_y = P \sin \mathbf{q} \quad (57.)$$

e entre as componentes nodais nas direções globais e as forças na direção local

$$\begin{Bmatrix} P_x^i \\ P_y^i \\ P_x^j \\ P_y^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & 0 \\ \sin \mathbf{q} & 0 \\ 0 & \sin \mathbf{q} \\ 0 & \cos \mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^i \\ P^j \end{Bmatrix} \quad (58.)$$

Substituindo-se (54) e (57) em (42) fica

$$\begin{Bmatrix} P_x^i \\ P_y^i \\ P_x^j \\ P_y^j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{Gi} \\ V^{Gi} \\ U^{Gj} \\ V^{Gj} \end{Bmatrix} \quad (59.)$$

sendo

$$k_{ij}^G = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} & -\cos^2 \mathbf{q} & -\cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} \\ \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} & \sin^2 \mathbf{q} & -\cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} & -\sin^2 \mathbf{q} \\ -\cos^2 \mathbf{q} & -\cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} & \cos^2 \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} \\ -\cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} & -\sin^2 \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} & \sin^2 \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (60.)$$

sendo k_{ij}^G é a matriz de rigidez segundo os eixos globais.

4 - EXEMPLO: TRELIÇA COMPOSTA POR 3 BARRAS E 3 NÓS

Determinar os deslocamentos nodais na treliça esquematizada abaixo:

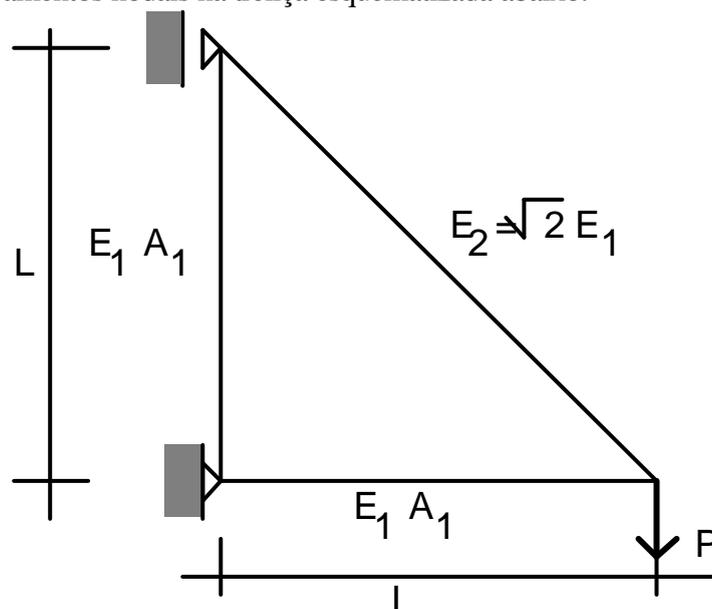


Figura 11 - Treliça do exemplo 1

comprimento $L = 1 \text{ m}$
 Módulo de Elasticidade $E_1 = 100 \text{ GPa}$
 $A = 0,01 \text{ m}^2$
 $P = 10.000 \text{ KN}$

- a) Identificação do problema físico;
 b) Escolha do sistema de coordenadas de referência;
 c) Criação do modelo de Elementos Finitos:

c.1) Geometria:

NÓ	Coordenadas nodais		Incidência		
	X_G	Y_G	Barra	Nó inicial	Nó final
1	1	0	1	2	3
2	0	0	2	3	1
3	0	1	3	2	1

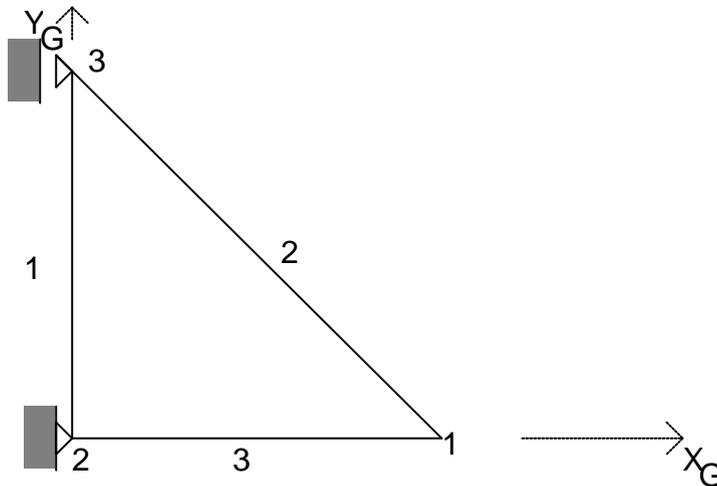


Figura 12 Modelo de Elementos Finitos

c.2) Definição das propriedades materiais, carregamentos e condições de contorno:

- propriedades materiais:
 - barras 1 e 3 $E_1 = 100 \text{ GPa}$ $A_1 = 0,01 \text{ m}^2$
 - barra 2 $E_2 = 142 \text{ GPa}$ $A_2 = 0,01 \text{ m}^2$
- carregamentos:
 - NÓ 1 $P_y = 10000 \text{ KN}$ carga concentrada aplicada na direção do eixo Y_G no sentido contrário.
- condições de contorno:
 - NÓ 2 $U_G = V_g = 0$ engastado
 - NÓ 3 $U_G = 0$ simplesmente apoiado

d) Cálculo das matrizes de rigidez elementares:

d.1) Barra 1 incidência 2 P 3

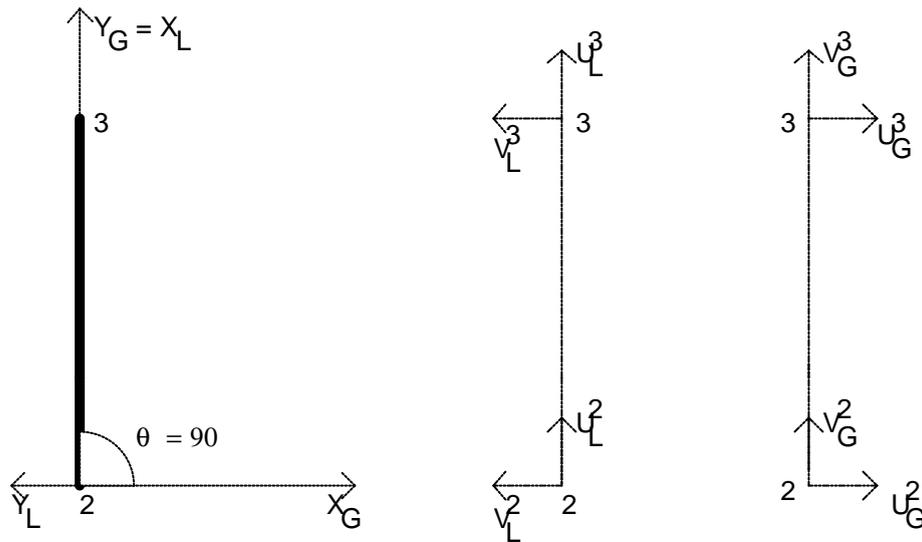


Figura 13 - Eixos e graus de liberdade da barra 1

matriz de rigidez local:

$$\frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.61.)$$

ângulo $\theta = 90$, $\cos \mathbf{q} = 0$ e $\sin \mathbf{q} = 1$, matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \sin \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.62.)$$

matriz de rigidez global:

$$k_{ij}^{1G} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.63.)$$

d.2) Barra 2 incidência 3 P 1

matriz de rigidez local:

$$\frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.64.)$$

ângulo $\theta = 315$, $\cos \mathbf{q} = \sqrt{2}/2$ e $\sin \mathbf{q} = -\sqrt{2}/2$, matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q} & \text{sen} \mathbf{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{q} & \text{sen} \mathbf{q} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.65.)$$

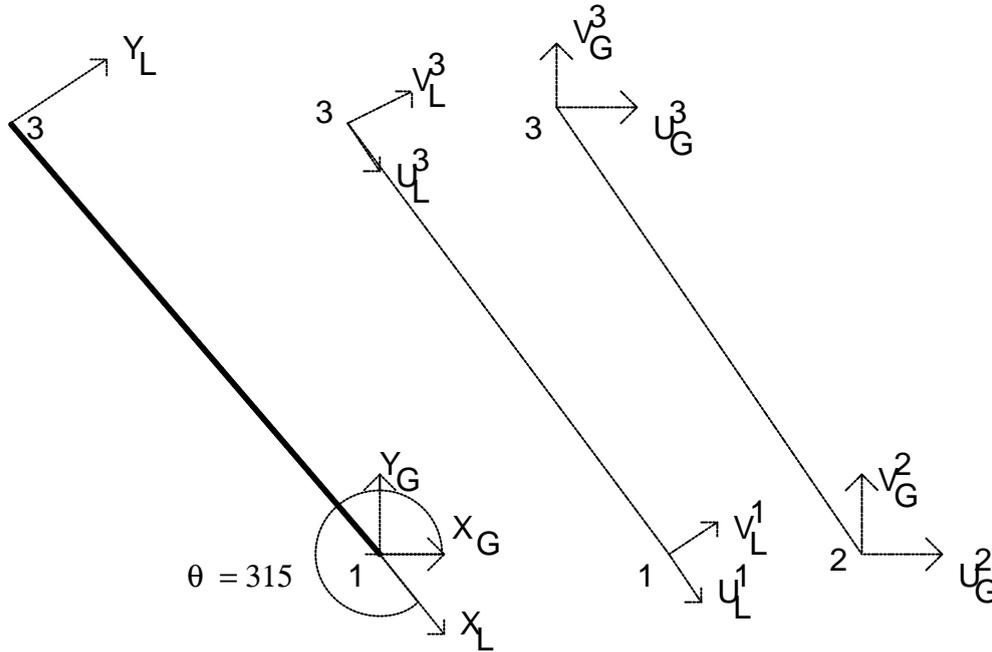


Figura 14 - Eixos e graus de liberdade da barra 2

matriz de rigidez global:

$$k_{ij}^{2G} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.66.)$$

d.3) **Barra 3** incidência 2 P 1

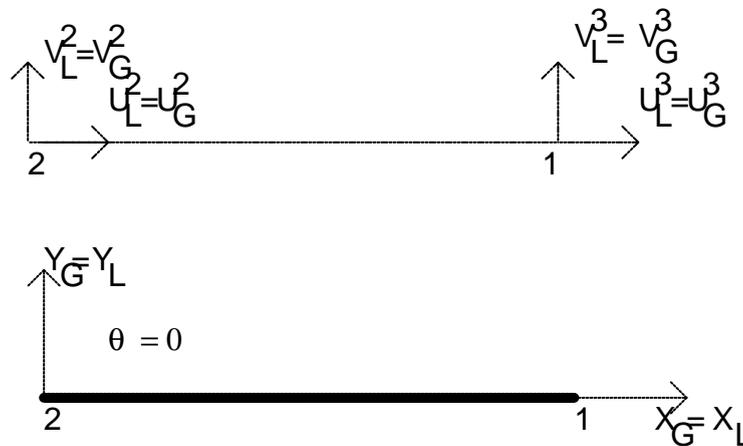


Figura 15 - Eixos e graus de liberdade da barra 3

matriz de rigidez local:

$$\frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.67.)$$

ângulo $\theta = 90$, $\cos q = 1$ e $\sen q = 0$, matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} \cos q & \sen q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos q & \sen q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.68.)$$

matriz de rigidez global:

$$k_{ij}^{3G} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.69.)$$

e) montagem da matriz de rigidez global:

$$k_{ij} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

f) imposição das condições de contorno:

cargas aplicadas:

$$P_x^1 = 0, \quad P_y^1 = -P, \quad P_y^3 = 0$$

reações nos vínculos:

$$P_x^2 = R_x^2, \quad P_y^2 = R_y^2, \quad P_x^3 = R_x^3$$

deslocamentos prescritos homogêneos:

$$U_G^2 = 0, \quad V_G^2 = 0, \quad U_G^3 = 0$$

vetor de cargas transposto:

$$P_i^T = \{0 \quad -P \quad P_x^2 \quad P_y^2 \quad P_x^3 \quad 0\}$$

vetor deslocamentos transposto:

$$U_i^T = \{U_G^1 \quad V_G^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad V_G^3\}$$

Resolvendo-se fica:

$$U_G^1 = -\frac{PL_1}{A_1E_1} = -\frac{10^7}{10^{-2}10^{11}} = -10^{-2} = -0,01$$

$$V_G^1 = -\frac{4PL_1}{A_1E_1} = -0,04$$

$$V_G^3 = -\frac{PL_1}{A_1E_1} = -0,01$$